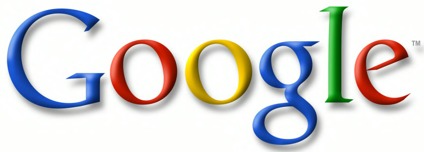
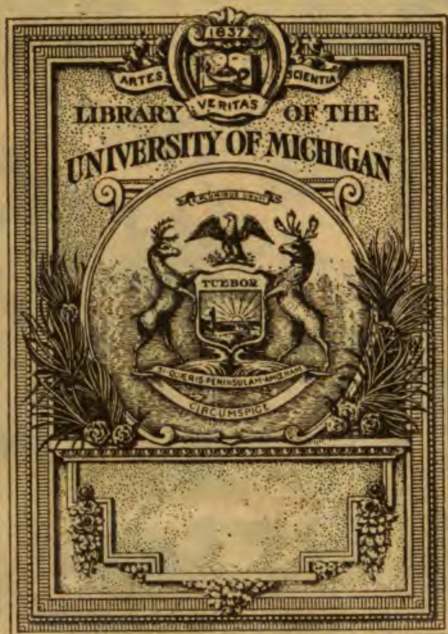
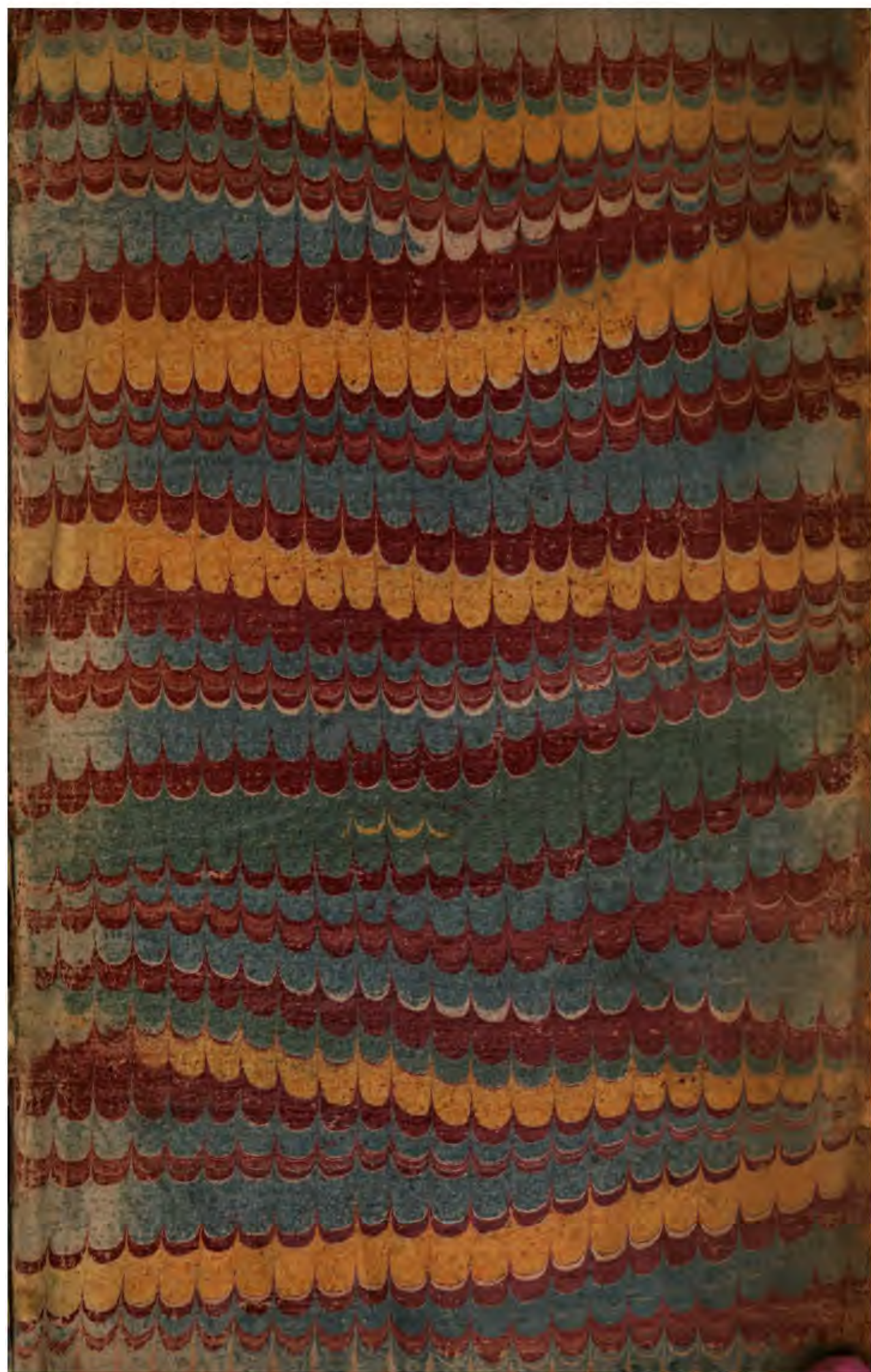
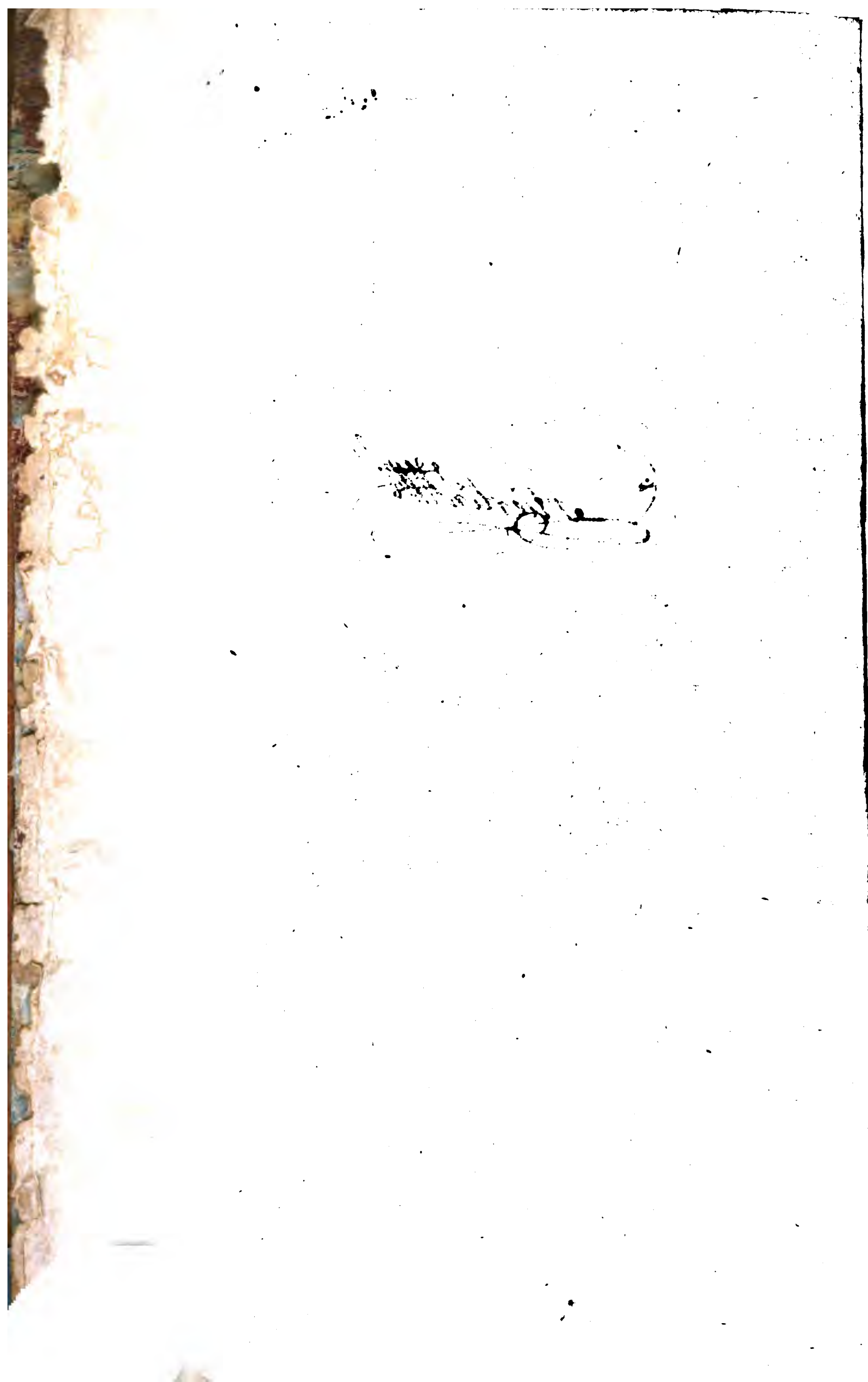



1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE



Stierlin



LEÇONS
ELEMENTAIRES
DE MÉCANIQUE,
OU
TRAITÉ ABRÉGÉ
DU MOUVEMENT
ET DE L'ÉQUILIBRE.

Par M. l'Abbé DE LA CAILLE, *de l'Académie Royale des Sciences, de celles de Prusse, de Suede, de Russie, & de l'Institut de Bologne; Professeur de Mathématiques au College Mazarin.*

Nouvelle Édition, revue, corrigée & augmentée.



A PARIS,

Chez H. L. GUERIN & L. F. DELATOUR, rue S. Jacques, à S. Thomas d'Aquin.

M. DCC. LXIV.

Avec Approbation & Privilege du Roi.

Prof. Alex. Ziwet
gt.
2-23-1923

AVERTISSEMENT.

QUAND MÊME la Mécanique ne ſeroit que la ſcience des Machines, comme le fait entendre l'étymologie de ſon nom, on ne pourroit en conteſter l'utilité, ni même la néceſſité. Il eſt vrai qu'on rencontre encore des Machiniſtes, qui guidés uniquement par une certaine induſtrie naturelle, jointe à quelque adreſſe des mains, prétendent que ce talent leur ſuffit, & que l'étude des principes vantés par les Mathématiciens, ne ſerviroit qu'à éteindre le feu de leur génie, & à les empêcher d'inventer quelque choſe de nouveau. Ils ſe font encore illuſion, en ce qu'ils racontent, que les Machines les plus belles & les plus utiles, ont été trouvées par hazard, ou par des perſonnes dépourvues de ſciences. Je ne m'amuſerai point à réfuter ici de pareilles idées : ceux qui s'y livrent, pour excuſer leur pareſſe, ou pour ſe conſoler des reproches que leur ignorance leur attire ſouvent, ſont aſſez punis par le peu de fruit qu'ils tirent de leurs eſſais & de leurs dépenſes. Mais heureuſement cet ancien préjugé ſe diſſipe de plus en plus, & l'expérience a maintenant convaincu preſque tout le monde, que lorſqu'on s'eſt propoſé d'imaginer de nouvelles machines, ou de perfectionner les anciennes, on n'eſt sûr d'avoir réuſſi, avant que de les faire exécuter, qu'à proportion qu'on a plus de connoiſſances Mathématiques & Phyſiques,

& plus d'uſage & d'habitude dans la profeſſion d'Artiſte.

La Science qu'on appelle *la Mécanique*, embraſſe aujourd'hui bien d'autres objets que la deſcription & les propriétés des Machines. Elle s'étend en général ſur tout ce qui eſt capable de recevoir ou de communiquer du mouvement, & par conſéquent ſur toute la matiere dont l'univers eſt formé. C'eſt une ſcience preſque toute nouvelle, & due aux recherches des Mathématiciens modernes. Ce n'eſt pas une ſcience phyſico-mathématique, mais exacte, & fondée ſur des principes certains, & ſur les idées claires que nous avons du mouvement. Elle ne ſe borne pas à l'expoſition des vérités ſimplement curieuſes; car en cela elle ne différeroit pas de cette partie de la Philoſophie qu'on a appellée *la Phyſique ſpéculative*, qui n'eſt proprement que la ſcience du mouvement; mais après avoir diſtingué & combiné les cauſes de tous les phénomenes que le mouvement produit; après avoir calculé l'effet de chacune en particulier, & le réſultat général de leurs efforts réunis; après avoir par ce moyen développé tous les reſſorts ſecrets, qui font agir tous les corps, la Mécanique nous enſeigne les moyens ſûrs d'employer, le plus avantageuſement qu'il eſt poſſible, tout ce qui eſt à portée de nous dans la nature, pour nous ſoulager dans nos travaux en ſuppléant à notre foibleſſe, pour ſatiſfaire à peu de frais à nos beſoins, & pour nous procurer toutes ſortes d'agréments. Par un calcul cer-

tain, qui nous met en état de prédire ce qui réſultera de l'aſſemblage des piéces dont on veut compoſer une machine, elle nous épargne des tâtonnements diſpendieux & les expériences en grand, qui ruinent & déshonorent ſouvent le Machiniſte, lorſqu'incapable d'en prévoir le ſuccès, & d'en démontrer l'infaillibilité avant l'exécution, il l'entreprend par un excès de confiance ſur ſon talent.

Mais plus l'objet de la Mécanique eſt varié & étendu, plus il eſt difficile d'en réduire les principes en un ſyſtême clair & méthodique : auſſi n'avons-nous pas encore en François de livre qui les renferme tous d'une maniere ſatisfaiſante. Parmi les Auteurs les plus eſtimés qui ont écrit ſur cette matiere, les uns ſe ſont contentés d'en éclaircir quelques parties, d'autres nous ont donné des Théories générales, mais ſi ſublimes, qu'il eſt impoſſible d'y atteindre avant que d'avoir pénétré très-avant dans la haute Géométrie, & d'avoir acquis une grande habitude dans l'Analyſe infinitéſimale. Or lorſqu'on eſt parvenu à ce degré de connoiſſance, il arrive ordinairement qu'on aime mieux ſe frayer une route particuliere, & réſoudre ſoi-même les problêmes qu'on rencontre dans les livres de ces grands Mécaniciens, que de ſuivre leurs briſées, & d'étudier le procédé de leurs ſolutions.

Le devoir de ma profeſſion m'a obligé, il y a pluſieurs années, de raſſembler en un petit volume les vérités fondamentales de la Mécanique, & d'en

éclaircir les propositions qui sont les plus nécessaires, soit pour avoir des notions du mouvement suffisantes pour l'usage ordinaire de la vie, soit pour mettre les jeunes Mathématiciens en état de profiter de la lecture des livres où la Physique est traitée d'une maniere plus relevée qu'à l'ordinaire, & de pousser eux-mêmes leurs recherches plus loin : & quoique l'édition que j'en donne ici soit beaucoup plus ample & plus correcte que la premiere, qui n'étoit qu'un essai assez informe, je ne me flatte pas encore d'avoir réussi parfaitement. Je compte pourtant que ceux qui savent combien il est plus difficile de faire un livre vraimenr élémentaire sur une science, que d'en étendre les limites par de nouvelles recherches sur quelques-unes de ses parties, ceux-là, dis-je, verront avec quelque plaisir, le grand nombre de principes, que j'ai tâché de rendre intelligibles à ceux qui savent les Eléments d'Algébre & de Géométrie.

On trouvera dans ce livre deux sortes de citations : les unes sont des nombres en chiffre renfermés seuls entre deux crochets ; ils indiquent un renvoi au numero marquée par ces chiffres dans ce Traité de Mécanique. Les autres citations sont des nombres en chiffre précédés des lettres initiales, *Elem.* aussi renfermés entre deux crochets; ils marquent un pareil renvoi à quelqu'un des numéros des *Leçons Elémentaires de Mathématiques* que j'enseigne, & à l'Edition qui en a été faite en 1756 chez le même Libraire.

Extrait des Regiſtres de l'Académie Royale des Sciences.

Du 23 Février 1743.

MEſſieurs de Montigny & l'Abbé de Gua ayant lu par ordre de l'Académie les *Leçons Elémentaires de Mécanique*, de M. l'Abbé de la Caille, & ayant fait leur rapport, l'Académie a jugé cet Ouvrage digne de l'impreſſion. En foi de quoi j'ai ſigné le préſent Certificat. A Paris ce 24 Février 1743.

DORTOUS DE MAIRAN, *Secr. perp. de l'Acad. Royale des Sciences.*

PRIVILEGE DU ROI.

LOUIS, par la grace de Dieu, Roi de France & de Navarre; à nos amés & féaux Conſeillers, les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand-Conſeil, Prévôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Juſticiers qu'il appartiendra, SALUT. Nos bien-amés LES MEMBRES DE L'ACADEMIE ROYALE DES SCIENCES de notre bonne Ville de Paris, nous ont fait expoſer qu'ils auroient beſoin de nos Lettres de Privilége pour l'impreſſion de leurs Ouvrages: A CES CAUSES, voulant favorablement traiter les Expoſans, Nous leurs avons permis & permettons par ces Préſentes de faire imprimer par tel Imprimeur qu'ils voudront choiſir, toutes les Recherches ou Obſervations journalieres; ou Relations annuelles de tout ce qui aura été fait dans les Aſſemblées de ladite Académie Royale des Sciences, les Ouvrages, Mémoires ou Traités de chacun des Particuliers qui la compoſent, & généralement tout ce que ladite Académie voudra faire paroître, après avoir fait examiner leſdits Ouvrages, & jugé qu'ils ſont dignes de l'impreſſion, en tels volumes, forme, marge, caracteres, conjointement ou ſéparement, & autant de fois que bon leur ſemblera, & de les faire vendre & débiter par tout notre Royaume, pendant le tems de vingt années conſécutives à compter du jour de la date des Préſentes; ſans toutefois qu'à l'occaſion des Ouvrages ci-deſſus ſpécifiés il en puiſſe être imprimé d'autres qui ne ſoient pas de ladite Académie: Faiſons défenſes à toutes ſortes de perſonnes, de quelque qualité & condition

qu'elles soient, d'en introduire d'impression étrangere dans aucun lieu de notre obéissance ; comme aussi à tous Libraires & Imprimeurs d'imprimer ou faire imprimer, vendre, faire vendre, & débiter lesdits Ouvrages, en tout ou en partie, & d'en faire aucunes traductions ou extraits, sous quelque prétexte que ce puisse être, sans la permission expresse & par écrit desdits Exposans, ou de ceux qui auront droit d'eux, à peine de confiscation des Exemplaires contrefaits, de trois mille livres d'amende contre chacun des contrevenans; dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, & l'autre tiers auxdits Exposans, ou à celui qui aura droit d'eux, & de tous dépens, dommages & intérêts ; à la charge que ces Présentes seront enregistrées tout au long sur le Registre de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris, dans trois mois de la date d'icelles ; que l'impression desdits Ouvrages sera faite dans notre Royaume, & non ailleurs, en bon papier & beaux caracteres, conformément aux Reglemens de la Librairie ; qu'avant de les exposer en vente, les Manuscrits ou Imprimés qui auront servi de copie à l'impression desdits Ouvrages seront remis ès mains de notre très-cher & féal Chevalier le sieur DAGUESSEAU, Chancélier de France, Commandeur de nos Ordres ; & qu'il en sera ensuite remis deux Exemplaires dans notre Bibliothéque publique ; un en celle de notre Château du Louvre, & un en celle de notredit très-cher & féal Chevalier le sieur DAGUESSEAU, Chancélier de France, le tout à peine de nullité desdites Présentes : du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir lesdits Exposans & leurs ayans cause pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement. Voulons que la copie des Présentes, qui sera imprimée tout au long, au commencement ou à la fin desdits Ouvrages, soit tenue pour duement signifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amés, féaux Conseillers & Secréraires, foi soit ajoûtée comme à l'Original. Commandons au premier notre Huissier ou Sergent sur ce requis, de faire pour l'exécution d'icelles, tous actes requis & nécessaires, sans demander autre permission, & nonobstant Clameur de Haro, Charte Normande, & Lettres à ce contraires : CAR tel est notre plaisir. DONNÉ à Paris le dix-neuvieme jour du mois de Février, l'an de grace mil sept cens cinquante, & de notre Regne le trente-cinquiéme. Par le Roi en son Conseil. M O L.

Registré sur le Registre XII. de la Chambre Royale & Syndicale des Libraires & Imprimeurs de Paris, N. 430. Fol. 309. conformément au Réglement de 1723. qui fait défenses, article 4. à toutes personnes, de quelque qualité & condition qu'elles soient, autres que les Libraires & Imprimeurs de vendre, débiter & faire afficher aucuns Livres pour les vendre, soit qu'ils s'en disent les Auteurs ou autrement ; à la charge de fournir à la susdite Chambre huit Exemplaires de chacun, prescrits par l'art. 108, *du même Réglement. A Paris, le* 5 *Juin* 1750. Signé, LE GRAS, Syndic.

LEÇONS



LEÇONS ÉLÉMENTAIRES DE MÉCANIQUE.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

Du Mouvement en général, des circonſtances, & des différentes ſortes de Mouvemens.

1. LE Mouvement eſt le tranſport d'un Corps d'un lieu dans un autre. Le Repos au contraire eſt la demeure d'un Corps dans un même lieu.

2. L'idée du Mouvement renferme 1°. Celle d'une force ou puiſſance qui le cauſe. 2°. Celle d'un Corps ou Mobile. 3°. Celle d'un eſpace ou chemin compris entre les termes du Mouvement. 4°. Celle du temps ou de la durée du Mouvement.

3. La comparaiſon de ces deux dernières idées en forme une autre, qui eſt celle de la *Vîteſſe* du Mouvement : parce qu'on conçoit naturellement qu'un Corps a d'autant plus de vîteſſe qu'il parcourt plus d'eſpace en moins de temps, & réciproquement.

4. Les différentes vîteſſes & les différentes poſitions des eſpaces parcourus par les Corps, (qu'on appelle leurs *direc-*

tions) produisent différentes sortes de Mouvemens.

5. Le *Mouvement absolu* d'un Corps est celui où l'on considére que ce Corps change réellement de place, par rapport aux bornes qu'on imagine dans l'espace immense qui remplit l'Univers.

6. Le *Mouvement rélatif* d'un Corps, est celui où on le considére changeant de place, par rapport à des bornes prises dans une partie déterminée de l'Univers.

On peut appliquer ces définitions au repos absolu & au repos rélatif; mais pour les faire comprendre par un exemple sensible, sans entrer dans des discussions Métaphysiques sur la réalité du Mouvement absolu, nous considérerons ce qui se passe par rapport à un homme qui est en mer sur un vaisseau. S'il se tient assis ou debout, sans changer de situation, tandis que le vaisseau marche, on conçoit que l'homme & le vaisseau ont un même mouvement absolu, parce qu'ils approchent tous deux réellement d'un certain point du Monde; mais que l'homme est dans un repos rélatif au vaisseau. Si l'homme marche dans un sens opposé à la route du vaisseau, & avec la même vîtesse que le vaisseau, cet homme n'a qu'un mouvement rélatif au vaisseau, & reste dans un repos absolu par rapport aux différents points fixes de l'Univers.

7. Le *Mouvement réel* est celui qui s'exécute en effet dans le Corps qu'on voit en mouvement.

8. Le *Mouvement apparent* est une illusion optique, occasionnée par quelque mouvement réel, dont nous ne nous appercevons pas, & que nous attribuons à des objets qui ne l'ont pas, du moins tel que nous le voyons. Un homme emporté par un vaisseau, & qui voit les bords de la mer fuir devant lui, est dans un mouvement réel & dans un repos apparent: & les bords de la mer sont dans un repos réel, & ont un mouvement apparent.

9. Le Mouvement s'appelle *uniforme*, lorsqu'un Corps parcourt des espaces égaux en temps égaux, ou qu'il conserve toujours une même vîtesse.

10. Le Mouvement est *accéléré*, lorsque le Corps parcourt

des espaces qui en temps égaux deviennent de plus en plus grands, ou lorsque sa vîtesse va toujours en augmentant.

11. Le Mouvement est *retardé*, quand un Corps parcourt des espaces qui en tems égaux vont en décroissant, ou quand sa vîtesse diminue continuellement.

En général le Mouvement est *uniforme*, *accéléré*, ou *retardé*, selon que la raison de l'espace parcouru au tems est constante, croissante ou décroissante.

12. De tous ces Mouvemens les uns sont *simples*, les autres *composés*; les uns se font en ligne droite, les autres dans des courbes de différentes espèces: les uns se font dans un même plan, les autres dans des plans différens.

Ce sont tous ces Mouvemens qui font le sujet de ces Leçons.

Des Expressions des rapports dont on se sert dans la Mécanique.

13. QUand deux quantités hétérogenes varient dans un certain rapport déterminé, comme si les différentes valeurs de la quantité variable x doivent toujours être proportionnelles aux valeurs de la quantité variable y, les Mécaniciens expriment ce rapport par une équation: par exemple, ils font, $x = y$, ce qui ne signifie pas x est égal à y (lorsque ces deux quantités sont hétérogenes, car x, par exemple, peut représenter une force, & y un tems); mais cela signifie, x est toujours comme y: en sorte que si x devient triple, par exemple, y devient aussi-tôt triple. De même cette expression $x = yz$ signifie, les valeurs de x sont toujours entr'elles comme le produit des valeurs de y & de z, ou bien, les valeurs de x sont en raison composée des raisons directes des valeurs de y & de z. Cette expression $x = \frac{yz}{ut}$ signifie, les valeurs de x sont entr'elles comme le produit des valeurs de y & de z divisé par le produit des valeurs de u & de t, ou bien, elles sont entr'elles

en raiſon composée des raiſons directes des valeurs de y & de z, & des raiſons inverſes des valeurs de u & de t. On exprime quelquefois ce rapport en diſant, x eſt directement comme y & z, & réciproquement comme u & t. Enfin cette expreſſion $x = \frac{1}{yz}$ ſignifie, les valeurs de x ſont entr'elles en raiſon composée des inverſes des valeurs de y & de z : ou bien les valeurs de x ſont réciproquement comme yz.

14. Quand dans une formule algébrique il ſe trouve quelque quantité conſtante de ſa nature, ou qu'on ſuppoſe conſtante, ſoit qu'elle ſoit ſeule, ſoit qu'il y en ait pluſieurs, alors ſans changer le rapport entre les quantités variables qui ſont dans cette formule, on le rend beaucoup plus ſimple en mettant 1 à la place de chaque quantité conſtante, & en faiſant la réduction qu'exige cette ſubſtitution. Par exemple, dans la formule $p = \frac{abx}{cy}$, qui exprime une valeur abſolue de p, ſi on ſçait, ou ſi on ſuppoſe que a, b, c ſoient des quantités conſtantes, alors en les faiſant chacune $= 1$, & en ſubſtituant, la formule ſe reduira à $p = \frac{x}{y}$, ce qui n'exprime plus une valeur abſolue de p, mais le rapport de ſes différentes valeurs, ſelon que les valeurs de x & de y viendront à varier. De même, ſi dans la formule $q = \frac{at}{z}$, on fait at conſtant, reſtera $q = \frac{1}{z}$: ce qui ne ſignifie plus, q eſt égal à $\frac{1}{z}$, mais q varie en raiſon inverſe de z.



AXIOMES ou PRINCIPES

Sur lesquels toutes les Démonstrations de la Mécanique sont fondées.

15. I. L*Es effets sont proportionnels à leurs causes*, C'est-à-dire : un effet croît en même raison que l'action de la cause qui le produit ; il décroît en même raison que cette action décroît. En général, si une cause C produit un effet E, cette cause devenant *m* C, produira un effet *m* E : *m* signifie un coéfficient quelconque entier ou fractionnaire.

16. Il suit de cet axiome, que *Si un effet dépend de plusieurs causes disparates ou hétérogenes*, ou qué *si plusieurs circonstances différentes concourent à la production d'un effet, cet effet est toujours comme le produit des causes qui en croissant contribuent à augmenter cet effet, divisé par le produit des causes qui en croissant contribuent à le diminuer, ou qui ne peuvent contribuer à l'augmenter, qu'en décroissant.* Autrement, *Un effet produit par plusieurs causes disparates, est en raison composée des raisons directes de toutes celles qui doivent croître pour augmenter cet effet, & des raisons inverses de toutes celles qui doivent décroître pour l'augmenter aussi.*

17. Pour faire comprendre cela par un exemple sensible, Soit un chariot qu'il faille conduire en quelque endroit. Il est clair qne la facilité de ce transport ou effet E dépend de la charge P du chariot, du nombre N des chevaux qu'on y employe, de la vigueur V de ces chevaux, de la longueur L du chemin qu'il faut faire, de la facilité F de ce chemin, & du tems T qu'il faut employer à le faire. Or on voit que la facilité de ce transport augmentera de plus en plus à mesure que le nombre des chevaux, que leur vigueur, que la facilité du chemin & que le tems augmenteront, tandis que la charge & la longueur du chemin diminueront. Ainsi suivant ce principe, $E = \frac{NVFT}{PL}$.

Car si ces six conditions restoient toujours les mêmes, l'effet E seroit toujours le même, & alors cet effet E, & chacune des quantités P, N, V, F, L, T, pouroient être supposées $= 1$, Mais puisque nous cherchons ce qui doit arriver lorsque ces quantités varient, supposons que ces variations se fassent successivement, & que dans le premier instant cinq de ces conditions restant les mêmes, le nombre des chevaux vienne à augmenter dans le rapport de 1 à 3, ou que N devienne $= 3$; la facilité du transport E deviendra aussi-tôt triple, & E sera $= 1 + 1 + 1 = 3 = N$. Si dans l'instant suivant la vigueur de chaque cheval augmente dans la raison de 1 à 4, ou si V devient $= 4$, alors chaque cheval pourra faire un effort quadruple du précédent, & E deviendra $4 + 4 + 4 = 3 \times 4 = NV$. Si dans le troisieme instant le chemin devient plus facile dans le rapport de 1 à 5, ou si F devient $= 5$, chaque effort de chaque cheval contribuera au quintuple à faciliter l'effet E; qui deviendra $= 20 + 20 + 20 = 3 \times 4 \times 5 = 60 = NVF$. Si dans l'instant suivant on devient maître d'employer un tems double pour faire le voyage, T sera $= 2$, la facilité du transport deviendra double, & E sera $40 + 40 + 40 = 3 \times 4 \times 5 \times 2 = 120 = NVFT$. Si dans le cinquième instant la charge vient à augmenter dans le rapport de 1 à 4, ou si P devient 4, alors l'effort de chaque cheval sur toute la charge n'a plus qu'un quart de l'effet qu'il avoit dans l'instant précédent; E devient donc $= \frac{40}{4} + \frac{40}{4} + \frac{40}{4} = 10 + 10 + 10 = \frac{3 \times 4 \times 5 \times 2}{4} = \frac{120}{4} = 30 = \frac{NVFT}{P}$. Enfin si dans le sixième instant il arrive qu'il faille faire un chemin double de celui d'auparavant, ou si L devient $= 2$, la facilité du transport diminue de la moîtié, donc E sera $= \frac{10}{2} + \frac{10}{2} + \frac{10}{2} = 5 + 5 + 5 = \frac{3 \times 4 \times 5 \times 2}{4 \times 2} = \frac{120}{8} = \frac{30}{2} = 15 = \frac{NVFT}{PL}$.

18 Voici maintenant comment on peut démontrer ce

corollaire. Si deux effets E, e sont produits chacun par deux causes hétérogenes, P, Q; p, q qui en augmentant contribuent à augmenter chaque effet, je dis qu'on a $E : e :: PQ : pq$. Car supposons un troisième effet ε produit par les causes p, Q; si on veut comparer cet effet ε avec l'effet E, on voit que la cause Q, influant également dans tous les deux, ils sont entr'eux comme les causes différentes p, P, ou $\varepsilon : E :: p : P$. Donc $\varepsilon = \frac{Ep}{P}$. Si on compare ensuite cet effet ε avec l'effet e, on voit de même qu'à cause que les causes p sont égales ou constantes, ces effets ne sont entr'eux que comme les causes variables Q, q; & qu'ainsi $\varepsilon : e :: Q : q$; donc $\varepsilon = \frac{eQ}{q}$. Donc $\frac{Ep}{P} = \frac{eQ}{q}$ ou $Epq = ePQ$. Donc $E : e :: PQ : pq$ (Elem. 302). Ou en général $E = PQ$ (13.)

19. Si un effet est produit par plus de deux causes, comme, par exemple, par les causes P, Q, R, la démonstration sera la même; car en ne supposant d'abord que R de constante, on aura (18) $E = PQ$: soit fait $PQ = X$; l'effet pourra donc être consideré comme produit par les causes X & R, & par conséquent en ne supposant plus R constante, on aura $E = RX = PQR$.

20. Il en est de même pour les causes qui en augmentant contribuent à diminuer l'effet, parce que l'effet est réciproquement comme cette cause (15); or (Elem. 299) la raison inverse s'employe dans le calcul comme une raison directe, pourvu qu'on exprime la raison inverse par une fraction dont l'unité soit le numérateur.

21. A l'égard des causes homogénes qui entrent dans la production d'un effet, on peut dire que l'*effet est comme la somme des causes homogénes, qui en augmentant contribuent à augmenter l'effet, moins la somme des causes homogénes, qui en augmentant contribuent à diminuer l'effet.* Car des causes homogénes sont des causes qui agissent de la même manière, & qui ne différent que par le nom. Ainsi il est évident que toutes choses d'ailleurs égales, la facilité de conduire

un chariot trainé par des chevaux, & poussé par des hommes, est en raison de la somme de la force de ces hommes & de ces chevaux.

22. AXIOME II. *Un corps n'a de lui-même aucune vertu, aucune force, pour changer son état de repos ou de mouvement.*

23. COROLL. I. *Donc si un corps est en repos, il y restera toujours jusqu'à ce qu'on lui applique extérieurement une cause qui le mette en mouvement. De même un corps une fois mis en mouvement, y restera toujours jusqu'à ce que quelque cause l'arrête.*

24. COROLL. II. *Un corps qui a reçu une impression pour se mouvoir, se meut toujours d'une même manière proportionnée à cette impression, sans changer de route, & sans augmenter ni diminuer sa vîtesse :* c'est-à-dire *qu'il tend toujours à se mouvoir uniformément & en ligne droite.*

25. COROLL. III. *Un corps en mouvement ne peut décrire un polygone ou une ligne courbe, qu'il ne soit détourné de son chemin par quelqu'autre cause, à chaque fois qu'il décrit un des côtés finis de ce polygone, ou un des côtés infiniment petits de la courbe.*

26 COROLL. IV. *Un corps en mouvement ne peut augmenter sa vîtesse, qu'il ne reçoive une nouvelle impulsion plus favorable, que contraire à celle qu'il a déja reçue, & il ne peut rallentir sa vîtesse, que quand il reçoit une nouvelle impulsion plus contraire que favorable à la précédente.*

27. REMARQUE. I. Comme il n'y a pas d'effet sans cause, & que le manque de force dans un corps pour changer son état, produit néanmoins tous les effets réels énoncés dans les Corollaires précédents, les Mécaniciens, appellent ce manque de force *inertie.* Il faut donc entendre par l'*inertie*, la propriété qu'ont tous les corps de rester en repos, ou de continuer leur mouvement en ligne droite. D'où il suit *que la résistance qui s'oppose au changement d'état d'un corps, vient de son inertie.*

28. REMARQUE II. Il faut observer encore que les quatre Corollaires précédents ne doivent s'entendre que des mouvements absolus, ou considérés comme absolus, & non pas des rélatifs.

29. AXIOME III. *Les actions mutuelles de deux corps l'un sur l'autre sont toujours égales & dans des directions opposées.* Autrement, *La Réaction est toujours égale à l'Action.* Ou bien, encore, *Un corps n'agit pas sur un autre, sans y trouver une résistance égale à son effort.*

On ne peut en effet concevoir une action Phisique sans un obstacle, ni même une action plus forte qu'un obstacle: & lorsqu'une action est plus foible que l'obstacle, cette action devient sans effet, mais elle n'est détruite que par une résistance dans cet obstacle égale & contraire à cette action.

Si je tire une pierre avec une corde, la corde est réellement & également tendue, ce qui fait voir que la résistance de la pierre tire autant la corde vers la pierre, que l'action de ma main tire la corde vers moi: car si on vient à couper la corde vers le milieu, la partie de la corde qui est vers ma main se retirera par son ressort vers ma main; & la partie qui est vers la pierre, s'y portera aussi: or si la corde n'étoit pas tirée par la pierre, il est évident qu'elle devroit se porter vers ma main seulement.

Cet axiome est donc une suite nécessaire de l'inertie des corps, laquelle est proportionnelle à leur masse, ou à la quantité de matière dont ils sont composés.

Des différentes sortes de Corps & de leurs propriétés générales.

30. UN Corps est un amas de *matière*, c'est-à-dire, c'est un composé de la substance étendue suivant les trois dimensions, dont nous avons parlé dans les Elémens de Géométrie.

31. Les propriétés de la matière reconnues par tous les Philosophes sont 1°. qu'elle est *impénétrable*, c'est-à-dire, que deux ou plusieurs parties distinguées ne peuvent occuper une même place. 2°. Qu'elle est *mobile*. 3°. Quelle est *divisible en une infinité de parties*,

32. On considére dans un corps *sa figure*, *sa surface*, *sa solidité*, ou pour parler plus exactement *son volume*, & *sa masse*.

33. I°. L'expérience nous a appris qu'il n'y a pas de corps connu qui ne soit comme criblé d'une infinité de trous ou pores en tout sens. C'est ce qui fait qu'une certaine quantité de matière occupe plus d'espace qu'elle n'en occuperoit sans cela, & ce qui a obligé de distinguer entre la masse & le volume. La masse est la quantité absolue de matière qui compose un corps, & son volume est l'espace que ce corps occupe dans le lieu où il est : de sorte que si on pouvoit réduire un corps à n'avoir plus de pores, son volume deviendroit égal à sa masse.

34. Plus le volume approche d'être égal à la Masse, ou plus un corps contient de matière en moins d'espace, plus ce corps est *dense*; & moins un corps contient de matière dans un certain volume, moins ce corps est dense, ou plus ce corps est *rare*. Si donc on appelle M la masse d'un corps, S son volume, D sa densité, on aura (16) $D = \frac{M}{S}$, & c'est une formule par le moyen de laquelle on déterminera tous les rapports possibles entre les densités, les masses & les volumes des corps, de la même manière qu'on déduira dans le premier théorême suivant tous les rapports des tems, des espaces & des vîtesses par une formule semblable.

35. II°. L'expérience nous a encore fait connoître que parmi les corps les uns sont *solides*, les autres *fluides*.

Les corps solides sont ceux dont toutes les parties restent naturellement unies & adhérentes entr'elles, comme une pierre, un bâton: & les fluides sont ceux dont toutes les parties cédent aussi-tôt à toute impression, & en y cédant se meuvent entr'elles très-facilement.

La Mécanique des corps fluides fera le sujet d'un Traité particulier.

Les corps que nous connoissons participent plus ou moins de la dureté, de la mollesse & de l'élasticité.

36. III°. Un corps parfaitement mol seroit celui qui

changeroit sa figure d'une quantité finie par une impression infiniment petite. Et un corps parfaitement dur seroit celui qui ne pourroit changer de figure que par une impression infiniment grande: de sorte que la mollesse ou la dureté d'un corps se mesure par la force nécessaire pour lui faire changer de figure d'une quantité finie.

37. IV°. Un corps parfaitement élastique est celui qui ayant changé de figure par une impression quelconque, la reprend aussi-tôt avec une force de restitution égale à celle de l'impression : un corps est plus ou moins élastique, suivant que sa force de restitution approche plus ou moins d'être égale à la force de compression.

38. D'où il suit que *les corps qui seroient parfaitement durs, ou parfaitement mous, ne seroient pas élastiques.*

De la Puissance ou Force.

39. ON appelle *puissance* ou *force* toute cause qui exerce son action sur un corps pour changer son état de repos ou mouvement. Soit que ce changement se fasse, soit qu'il ne se fasse point.

40. L'effet de l'action d'une cause qui a mis un corps en mouvement est de lui avoir communiqué par ce mouvement une force égale à cette action, en sorte qu'un corps en mouvement fait sur un corps immobile qu'il rencontre un effort égal à celui que la force motrice a fait sur lui. Cet effet nous est connu par toutes les expériences, & il ne manque jamais en vertu de la Loi que Dieu à établie librement pour la communication des mouvemens.

C'est pour cela que nous entendrons quelquefois par le mot de *force*, une cause ou un effet d'un mouvement imprimé.

41. On appelle *force absolue* tout l'effort dont une puissance est capable, & qu'elle exerce lorsqu'elle est appliquée le plus avantageusement qu'il est possible par rapport à l'effet qu'on se propose ; & *force rélative*, tout l'ef-

fort qu'une puissance peut exercer dans la circonstance où elle se trouve appliquée.

On distingue différentes espèces de forces dont on donnera les définitions dans les différentes parties de la Mécanique, où l'on en examine la nature & les propriétés.

PREMIÈRE PARTIE.

DU MOUVEMENT RECTILIGNE.

Du Mouvement rectiligne, réel, simple & uniforme.

42. ON entend ici par mouvement simple, celui qui n'est produit ou censé produit que par l'application d'une seule force, qui agit en un instant sur un corps, & lui fait par conséquent (24) décrire une ligne droite avec une vîtesse uniforme. On verra cependant dans la suite qu'il n'y a pas de mouvement simple qu'on ne puisse regarder comme composé ; & réciproquement qu'il n'y a pas de mouvement rectiligne uniforme si composé, qu'on ne puisse le regarder comme produit par une simple action d'une seule force.

43. Dans le mouvement uniforme on considére les différents rapports des *vîtesses*, des *espaces* parcourus, & des *tems* employés à les parcourir; la *quantité du mouvement*, c'est-à-dire, les rapports des impressions que les corps ont reçues dans l'instant qu'ils ont été mis en mouvement ; & comme ils sont capables de communiquer ces impressions aux autres corps qu'ils peuvent rencontrer : cette propriété, ou cette quantité de mouvement, s'appelle aussi leur *force*.

44. THEOREME I. *Dans le mouvement uniforme, la vîtesse est exprimée par l'espace divisé par le tems*, ou ce qui est la même chose, *les vîtesses de deux corps mus uniformément sont*

en raison composée de la directe de l'espace que chaque corps a parcouru; & de l'inverse du tems que chacun a employé à parcourir cet espace. Ce théoréme s'exprime analytiquement par $u = \frac{e}{t}$; *u* signifie la vîtesse, *e* l'espace, *t* le tems.

Dem. L'espace comparé au tems fait connoître la vîtesse (3). Or l'espace en augmentant exige une plus grande vîtesse pour être parcouru dans un certain tems : & le tems en augmentant exige une moindre vîtesse pour faire parcourir le même espace, donc (16) $\frac{e}{t} = u$.

45. Coroll. I. *Les vîtesses sont en tems égaux comme les espaces parcourus pendant ces tems;* car alors $t = 1$. Donc en substituant $u = e$.

46. Coroll. II. *Les vîtesses employées à parcourir des espaces égaux sont réciproquement comme les tems.* Car alors $e = 1$: Donc $u = \frac{1}{t}$.

47. Coroll. III. *Les vîtesses de deux corps qui parcourent des espaces qui sont en même raison que les tems, sont égales entr'elles:* Car l'expression de deux espaces en même raison que les tems, est composée de deux fractions égales, à savoir de chaque espace divisé par chaque tems.

48. Coroll. IV. *Les vîtesses de deux corps qui parcourent des espaces qui sont entr'eux réciproquement comme les tems, sont entr'elles ou directement comme les quarrés de ces espaces, ou réciproquement comme les quarrés des tems :* car l'expression de l'espace en raison inverse du tems est $e = \frac{1}{t}$, ou $\frac{1}{e} = t$; substituant donc dans la formule $u = \frac{e}{t}$, on a $u = \frac{1}{tt}$, ou $u = ee$.

En faisant les mêmes raisonnemens & calculs sur la formule $e = ut$, qui se déduit de la formule $u = \frac{e}{t}$, on trouve :

49. Theor. II. *L'espace parcouru uniformément par un corps, est comme le produit de la vîtesse par le tems; ou en raison composée de la vîtesse & du tems.*

50. COROLL. I. *Les espaces parcourus avec des vîtesses égales, sont entr'eux comme les tems.*

51. COROLL. II. *Les espaces parcourus en tems égaux, sont comme les vîtesses.*

52. COROLL. III. *Les espaces parcourus en des tems proportionnels aux vîtesses, sont entr'eux comme les quarrés des vîtesses, ou comme les quarrés des tems;* car alors la raison composée des tems & des vîtesses est une raison doublée (Elem. 291), qui est la même que celle des quarrés d'une des deux raisons composantes (Elem. 298).

53. COROLL. IV. *Les espaces parcourus en des tems réciproquement proportionnels aux vîtesses, sont égaux entr'eux;* car en substituant $t = \frac{1}{u}$ ou $u = \frac{1}{t}$, la formule $e = ut$ devient $e = 1$.

54. THEOR. III. *Dans le mouvement uniforme, le tems est comme l'espace divisé par la vîtesse; ou en raison composée de la directe de l'espace & de l'inverse de la vîtesse;* car puisque $u = \frac{e}{t}$, on a $t = \frac{e}{u}$. Donc on aura aussi tous les rapports suivants, comme on a eu ceux des vîtesses.

55. COROLL. I. *Les tems employés à parcourir des espaces égaux, sont réciproquement comme les vîtesses.*

56. COROLL. II. *Les tems employés à parcourir des espaces inégaux avec des vîtesses égales, sont entr'eux comme ces espaces.*

57. COROLL. III. *Le tems employés à parcourir des espaces proportionnels aux vîtesses, sont égaux entr'eux.*

58. COROLL. IV. *Les tems employés à parcourir des espaces qui sont en raison inverse des vîtesses, sont entr'eux ou directement comme les quarrés des espaces, ou réciproquement comme les quarrés des vîtesses.*

59. THEOR. IV. *Dans le mouvement rectiligne uniforme, la force* f *ou la quantité de mouvement, s'exprime par le produit de la masse* m *du corps par sa vîtesse* u, *ou* $f = mu$.

DEM. Les corps dont les masses sont égales ont d'autant plus de vîtesse dans leurs mouvemens uniformes, que la

force imprimée a été plus grande; & réciproquement plus ils ont de vîteſſe, plus la force imprimée a dû être grande. Donc à maſſes égales, la force ou quantité de mouvement eſt comme la vîteſſe. Mais à maſſes inégales, il faut employer d'autant plus de force pour donner une même vîteſſe, que la maſſe eſt plus grande: donc à vîteſſes égales les forces imprimées aux corps mus uniformément ſont comme leurs maſſes: Donc en général, les forces ou quantités de mouvement ſont comme les produits des maſſes par les vîteſſes.

60. COROLL. De la formule $f = mu$ il eſt facile de conclure, que $m = \frac{f}{u}$, & $u = \frac{f}{m}$, & l'on peut tirer delà autant de comparaiſons entre les maſſes, les vîteſſes, les forces, que nous en avons faites dans les Theorêmes précédents entre les vîteſſes, les eſpaces, & les tems. On peut même faire une combinaiſon de rapports beaucoup plus étendue; eu ſubſtituant $\frac{e}{t}$ à la place de u dans la formule $f = mu$, on aura $f = \frac{me}{t}$, ou $ft = me$. *

61. THEOREME V. *On peut toujours ſuppoſer qu'un mouvement inégal quelconque, ſoit en ligne droite, ſoit en ligne courbe, eſt uniforme & rectiligne pendant un tems infiniment petit quelconque.*

DEM. Car de même que dans la Géométrie, les Elémens des courbes quelconques ſont des droites infiniment petites, de même dans la Mécanique on peut concevoir dans les mouvemens inégaux quelconques, que les eſpaces finis ſont la ſomme d'une infinité d'eſpaces infiniment

* Il n'eſt pas néceſſaire de ſe charger la mémoire de ces ſortes de rapports, on a mis ici tous ceux du Theorême I. pour ſervir d'exemple, & principalement parce que nous aurons ſouvent beſoin de les citer: on les trouve au reſte très-aiſément de ſoi-même, en ſe rappellant le Principe d'où eſt tirée la formule. Car, par exemple: puiſqu'un eſpace eſt d'autant plus grand qu'un corps l'a parcouru avec plus de vîteſſe dans un tems plus long, j'en conclus auſſi-tôt: donc les eſpaces ſont en raiſon compoſée des vîteſſes & des tems. Et puiſque le tems d'un mouvement eſt d'autant plus long qu'il y a plus de chemin à faire avec moins de vîteſſe: donc les tems ſont en raiſon compoſée de la directe des eſpaces & de l'inverſe des vîteſſes, &c.

petits, & par conséquent rectilignes, parcourus chacun dans des tems infiniment petits, avec la vîtesse que le mobile a reçue ou acquise. Or pendant la durée d'un instant infiniment petit, on ne peut concevoir d'inégalité dans la vîtesse.

62. COROLLAIRE. Dans un mouvement inégal quelconque, on pourra estimer dans un tems infiniment petit, la vîtesse, les forces, les espaces, &c. suivant tous les rapports précédents : comme si on exprime par du une vîtesse infiniment petite, par de un espace infiniment petit, par dt un tems infiniment petit, &c. comme on a coutume de faire dans l'analyse des infinis, on aura toujours, par les formules précédentes, les expressions des Elémens qui entrent dans les mouvemens quelconques ; & si on exprime par $\int$ la somme ou l'intégrale de ces quantités infiniment petites, on en représentera les effets finis. Par exemple, cette expression $\int\frac{de}{u}$ exprime le tems qu'un corps employe à décrire par un mouvement quelconque un espace quelconque : $\int u\,dt$ représente un espace fini quelconque parcouru dans un tems quelconque, &c. Dans les différents cas, l'on trouve la valeur de ces expressions, suivant les régles du calcul intégral.

Du Mouvement composé, absolu & uniforme.

63. ON entend par mouvement composé celui qui est produit par l'effort réuni de plusieurs causes qui agissent en même tems sur un même corps.

On connoit assez par expérience le mouvement composé. Un homme emporté par un vaisseau ne laisse pas d'y marcher librement en tout sens : il y jette une pierre qui va frapper à un point déterminé du vaisseau, de même que si ce vaisseau étoit immobile ; or il est évident 1°. que le mouvement absolu de cet homme, est un mouvement composé de son mouvement propre & de celui du vaisseau. 2°. Que ces deux mouvemens s'unissent, ou se détruisent selon que leurs directions se trouvent dans le même sens, ou dans un sens opposé : car, par exemple, lorsque le vaisseau est emporté rapidement, si on jette une pierre avec force dans la même direction contre un plan en repos, tel que le pilier d'un pont, il est clair que sans avoir

égard

égard à la masse de la pierre, le coup que le pilier recevra sera d'autant plus grand, que le vaisseau ira plus vîte, & que la pierre aura été jettée avec plus de force. Car si on n'avoit que présenté la pierre au pilier en la tenant dans la main, la vîtesse seule du vaisseau lui eût fait donner un coup à ce pilier. Au contraire, quand le vaisseau est passé au-delà du pont, si on jette contre ce pilier, la pierre avec la même force qu'auparavant, elle ne le frappera que foiblement, parce que le vaisseau allant dans un sens contraire à celui de la pierre, soustraira d'autant plus le pilier au choc de la pierre, qu'il ira plus vîte.

64. Enfin un corps qui est poussé vers un point du vaisseau, dans une direction oblique à la route du vaisseau n'arrive réellement à ce point, ni par la route absolue que suit le vaisseau, ni par la route absolue que ce corps suivroit si le vaisseau étoit immobile, mais par une direction moyenne entre ces deux routes. Par exemple : si du point A (fig. 8.) on veut rouler une boule B le long du bord A*n* du vaisseau A*n*HQ, pour aller toucher le point *n*; il est clair que si la ligne A*n* est égale à quatre fois la circonférence de la boule, cette boule ne fera que quatre tours depuis A jusqu'en *n* : soit appellé B le point de la circonférence de la boule qui touche le point A du vaisseau, il est évident que si le vaisseau étoit immobile, la boule en A poussée dans la direction A*n*, suivroit réellement la route A*n* par un mouvement absolu & uniforme, & que son point B seroit après le premier tour en *b*, après le second en *f*, après le troisième en N, après le quatrième il toucheroit le but *n*. Mais puisque nous supposons que le vaisseau se meut uniformément dans la direction AG; tandis que la boule fait un tour, le vaisseau avance, & ce tour étant achevé, le vaisseau est dans la position ECIR, & le but *n* est en C : donc le point B de la boule qui auroit dû être en *b*, est alors en *a*, en sorte qu'il s'est avancé vers l'autre côté de la quantité E*a* égale & parallèle à B*b* : & comme le bord du vais-

seau est en EC, la boule se trouve encore le long du bord du vaisseau, ayant cependant décrit la ligne A *a*, qui n'est ni celle qu'elle auroit décrit si le vaisseau eût été immobile, ni celle que le vaisseau suit; mais qui est entre deux. On verra de même qu'à la fin du second tour le vaisseau a la position DFKS, le but est en F, & le point B de la boule est en *d*: qu'à la fin du troisième tour, la position du vaisseau est MVOT, le but est en V, & le point B en L: qu'enfin après le quatrième tour le vaisseau est en *ml*PG, & la boule B a rencontré le but en *l*, après avoir parcouru réellement la ligne A *l* qui n'est ni celle du vaisseau, ni celle qu'elle auroit décrite, si le vaisseau eût resté immobile, mais qui tient un certain milieu entre deux.

Or on peut regarder le mouvement de la boule le long de A*l* comme l'effet composé d'une force qui la pousse de A en *n*, dans le même tems qu'une autre force pousse son centre de A en *m*, parce que ces deux actions ont réellement lieu dans cet Exemple.

65. Il est donc certain par expérience, qu'un corps peut se mouvoir en vertu de différentes forces qui agissent en différens sens.

66. THEOR. I. *Si deux puissances agissent en même tems sur un même corps suivant des directions qui sont dans une même ligne droite, & si ces directions sont dans le même sens; le corps se meut uniformément avec une vîtesse égale à la somme des vîtesses qu'il eût eues si les puissances eussent agi séparément, & dans la même direction. Mais si les directions des forces sont en sens contraire, le corps se meut uniformément suivant la direction de la puissance plus forte, & avec une vîtesse égale à la différence des vîtesses qu'il eût eues, si ces puissances eussent agi séparément.*

Tout cela est évident par ce qui a été dit ci-dessus (*63*). Dans le premier cas, les deux forces équivalent à une seule qui étant égale à la somme des deux, fait en un instant un seul effort contre le corps. Et dans le second cas, la plus petite force est totalement détruite par une égale quantité

de force qui eſt auſſi détruite dans la plus grande, en ſorte qu'il ne lui reſte plus que ſon excès de force, qui produit lui ſeul le mouvement; & par conſéquent le corps ne ſe meut que dans la direction de la plus grande force avec une vîteſſe proportionnée à ſon excès ſur l'autre.

67. COROLLAIRE. *Si dans le ſecond cas les forces oppoſées étoient égales, le corps reſteroit en repos.*

68. THEOREME II. *Si deux puiſſances* P, *p*, (fig. I.) *agiſſent en même tems ſur un corps* C, *ſuivant des directions* PC, *p*C, *qui ſont un angle quelconque, avec des efforts repréſentés par les longueurs des droites* PC, *p*C; *elles lui feront décrire uniformément une Diagonale* CB *d'un Parallélogramme* AD (*formé par les directions* PC, *p*C *prolongées en* CA, CD) *dans le même tems que la puiſſance* P *agiſſant ſeule, lui auroit fait décrire uniformément la ligne* CD, *& que la puiſſance p agiſſant ſeule, lui auroit fait décrire uniformément la ligne* CA.

DEM. Il eſt clair (65) que la puiſſance *p*C agiſſant dans la direction CA, parallèle à DB, n'empêche pas que la puiſſance PC n'agiſſe en même tems ſuivant CD, pour pouſſer le corps C vers cette parallèle BD, afin qu'il y arrive dans un tems donné: que par conſéquent dans ce tems le corps approchera de BD, en vertu de l'effort de la puiſſance PC, ſoit qu'on lui imprime en même tems une force ſuivant CA, ſoit qu'on ne la lui imprime pas: & qu'ainſi à la fin de ce tems, il ſe trouvera quelque part dans cette ligne BD. De même le corps C en vertu de la force *p*C arrivera à la fin du même tems quelque part dans la ligne AB parallèle à CD. Donc à la fin de ce tems le corps ſe trouvera dans le concours B de ces deux lignes DB, AB parallèles à CA, CD; donc il ſe trouvera dans la Diagonale du Parallélogramme CDBA.

69. COROLLAIRE I. Puiſque les puiſſances *p*, P, ſont ſuppoſées telles qu'en agiſſant ſéparément, l'une auroit pouſſé le corps de C en D, tandis que l'autre l'auroit pouſſé de C en A, il eſt clair (60) que P : *p* : : CD : CA.

70. COROLLAIRE II. Puisque C est un même corps poussé par les deux forces P, *p*, & que les espaces C D, C A sont parcourus en même tems, en vertu de ces forces, il suit que C D, C A représentent les vîtesses aussi bien que les espaces qui conviennent aux puissances P, *p*.

71. COROLLAIRE III. *Si avec les directions p* C, P C *on fait le Parallélogramme* P C *p* F, *la Diagonale* C B *prolongée de ce côté-là en* C F, *en sera aussi la Diagonale.* Car puisque P : *p* : : P C : *p* C ou F P : : C D : C A ou B D, & que l'angle F P C est égal à son alterne C D B; il suit (Elem. 559) que les triangles F P C, C D B sont semblables; donc l'angle P C F = B C D; or ces deux angles étant opposés au sommet & formés en partie par une même ligne droite P D, il faut qu'ils soient encore formés par l'intersection d'une même ligne droite comme BF, & que par conséquent les parties B C, C F soient en ligne droite.

72. COROLLAIRE IV. Donc *la Diagonale* F C *représente une puissance capable de pousser seule le corps de* C *en* B, *dans le même tems que la puissance* P *l'auroit poussé en* D, *& la puissance p en* A. Car puisque (69) les forces de P & de *p* sont comme les espaces C D, C A; à cause des triangles semblables F P C, C D B, la force qui auroit poussé seule le corps de C en B, est aussi comme l'espace CB.

73. COROLLAIRE V. Donc la force seule représentée par F C a le même effet que les deux forces P, *p* agissantes ensemble sur C: & par conséquent *on peut substituer la seule force* F C *aux deux forces unies* P C, *p* C; & réciproquement, *à la force seule* F C *on peut substituer deux autres forces quelconques, comme* P C, *p* C, *pourvu qu'elles soient telles, que les espaces* C D, C A, *que chacune agissant séparément auroit fait décrire en même tems au corps* C, *puissent être les côtés d'un Parallélogramme, dont l'espace* C B *parcouru en même tems en vertu de la seule force* F C, *puisse être la Diagonale.*

74. Une force F C considérée comme résultante des

efforts réunis PC, *p*C, s'appelle une *force composée* des forces PC, *p*C. Et quand à une force seule FC on subs- titue deux autres équivalentes PC, *p*C, on dit que cette force FC est *décomposée* en deux forces qui sont PC & *p*C.

75. COROLL. VI. *La somme de deux forces réunies pour en composer une, est toujours plus grande que la force composée ; & réciproquement une force composée est plus petite que la somme des forces dans lesquelles on la décompose*, comme il est évident, parce que la base CB qui représente la force composée, doit être plus petite que la somme des côtés CD, BD ou CA (Elem. 494.) Ce qui fait qu'on peut substituer la seule force FC aux deux *p*C, PC, ce n'est pas que celle-là soit égale aux deux autres, mais c'est qu'elle y produit le même effet, comme on verra bientôt (85.)

76. COROLL. VII. *Une force* FC *composée des deux* PC, *p*C, *produit un mouvement qui est dans le plan qui passe par les directions des deux forces composantes* PC, *p*C : parce qu'une Diagonale est nécessairement dans le plan de son Parallélogramme.

77. COROLL. VIII. *Un corps mû par une force composée, suit une direction qui participe, autant qu'il est possible, de la direction des forces composantes.*

78. COROLL. IX. *Un corps poussé par plusieurs puissances à la fois en plusieurs directions différentes dans un même plan, se meut uniformément, comme s'il n'étoit poussé que par une seule force équivalente à tous les efforts réunis de toutes ces puissances, & qui participe, autant qu'il est possible, de la direction de chacune.* Par exemple, si quatre forces poussent ensemble un corps C, (fig. 5.) ensorte qu'en un même temps la premiere soit capable de lui faire parcourir CD, la seconde CA, la troisième CE, la quatrième CG, le corps se mouvra uniformément suivant CH, direction qui participe, autant qu'il est possible, des quatre CD, CA, CE, CG; sa vîtesse & sa force sont représentées par CH, qui participe, autant qu'il est possible, des vîtesses & des forces représentées par CD, CA, CE, CG. Pour

trouver cette ligne CH, il faut conſtruire avec CD & CA le Parallélogramme AD, dont la diagonale CB repréſente les efforts CD, CA réunis. Enſuite regardant CB comme une ſeule force, conſtruiſez avez CB & CE un Parallélogramme EB, ſa Diagonale CF repréſentera les efforts réunis de CE & de CB, c'eſt-à-dire, des trois premières forces: enfin conſtruiſez avec CF & CG un Parallélogramme GF dont la Diagonale CH repréſentera (73) l'effet des quatre efforts réunis. En effet, ſi au lieu de commencer par le Parallélogramme ſur CD & CA, on commence par en faire un avec CG, CE, il donnera la Diagonale CK, avec laquelle & avec CA faiſant le Parallélogramme CKIA, on aura la Diagonale CI, avec laquelle & avec CD, on fera le Parallélogramme CIHD, qui donnera la même Diagonale CH, on pourra la trouver encore en faiſant les Parallélogrammes AD, GE, KB.

79. Ayant conſtruit une figure qui repréſente la poſition de toutes ces Diagonales, on peut trouver par la Trigonométrie le rapport & la direction de la force réſultante CH. Soient les angles DCA 56°, ACE 45°, ECG 28°, les forces, ou les eſpaces qui leur ſont proportionnels, CD = 10, CA = 13, CE = 14, CG = 8. 1°. Dans le triangle CDB on connoît les côtés CD = 10, DB = CA = 13, & l'angle CDB de 124°, parce qu'il eſt ſupplément de l'angle donné DCA. Donc ſuivant les régles de la Trigonométrie (Elem. 751) l'angle BCD eſt de 31° 58′, & CB de 20, 36. Retranchant 31° 58′ de 56°, reſtent 24° 2′ pour la valeur de l'angle BCA, auquel ajoutant l'angle ACE de 45°, la ſomme 69° 2′ ſera l'angle BCE. Or à cauſe du Parallélogramme BCEF, dans le triangle BCF, on connoît BC = 20, 36, BF = CE = 14, & l'angle CBF (ſupplément de BCE) de 110° 58′. Donc par un ſemblable calcul l'angle BCF ſera de 27° 16′, & le côté CF de 28, 54. Enfin ajoutant enſemble DCA 56°, ACE 45°, ECG 28°, & de la ſomme 129°, ôtant DCB

31° 58′, ensuite BCF 27° 16′ reste FCG 69° 46′, & dans le triangle FCH, à cause du Parallélogramme FCGH, on connoît CF = 28, 54, FH = CG = 8, & l'angle compris 110° 14′. Donc par un calcul semblable, on aura FCH 13° 29′, & CH = 32, 19. Donc si à DCF 59° 14′ on ajoute 13° 29′, on aura 72° 43′, angle DCH de la route du mobile avec la premiere direction CD : & l'espace qu'il parcourt est à l'espace CD, comme 32, 19 à 10.

80. COROLL. X. *Il suit de là que quel que soit le nombre des forces qui agissent en même tems sur un même corps, on peut les réduire à trois, à deux, à une, ou à tel nombre qu'on voudra ; & réciproquement, qu'il n'y a pas de force qu'on ne puisse décomposer en tel nombre d'autres qu'on voudra, pourvu qu'elles soient toujours des côtés de parallélogrammes, dont la décomposée soit une Diagonale.*

81. COROLL. XI. A cause de PC (fig. 1.) parallèle & égale à F*p* ou de *p*C parallèle & égale à FP, il est clair qu'on peut regarder les trois côtés du triangle FPC, ou ceux du triangle F*p*C comme représentans les deux forces composantes & la composée. *On peut donc, au lieu de parallélogrammes, se servir de triangles, pour exprimer la composition & la décomposition des forces.*

82. PROBLEME I. *Substituer à une force donnée* F, *deux forces* P, *p* *qui produisent le même effet.*

Ce Problême a deux cas. Car ou les directions de ces forces P, *p* sont données de position, ou ces forces sont exprimées par des lignes données de grandeur.

SOLUTION du premier cas. Que la droite FC (fig. 1.) exprime la force donnée F, faites au point C un angle *p*CP égal à l'angle que font entr'elles les directions données, ensorte cependant que FC soit comprise dans cet angle : par le point F menez les paralléles F*p*, FP aux côtés PC, *p*C de l'angle qu'on vient de faire, & par ce moyen on aura un Parallélogramme P*p*, dont les côtés PC, *p*C représenteront les forces demandées.

DEM. Prolongez indéfiniment *p*C, PC, FC, & ayant

pris sur celle-ci un point B à volonté, faites le Parallélogramme AD. Maintenant puisque PF est paralléle à p A, & BD à p A, FP & BD sont paralléles, & les angles alternes FPC, CDB sont égaux : par la même raison l'angle alterne PFC = CBD, donc les triangles PCF, BCD sont semblables : donc FC : CB : : FP ou p C : BD ou CA : : PC : CD. Mais FC, qui est l'un des antécédents représente une force ; donc les autres antécédents p C, P C représentent aussi des forces. De même C B conséquent de la premiere raison représente un espace que la force donnée FC fait parcourir en un certain tems ; donc les autres conséquents CA, CD représentent les espaces que les forces p C, P C peuvent faire parcourir : mais parce que les espaces CB, CA, CD sont proportionnels aux forces FC, p C, PC, ils pourront être parcourus dans le même tems (60) : Donc la force F poussera le corps C en B dans le même tems que la force p le poufferoit en A, & la force P en D : Donc les forces p, P agissant conjointement, produisent le même effet que la seule force donnée F, & par conséquent on peut les lui substituer (73).

83. Solution *du second cas*, dans lequel on suppose que les forces requises soient représentées par des lignes données de grandeur, comme p C, & p F. Il est nécessaire que leur somme soit plus grande que la force donnée F C (75), afin que le problême soit possible.

Formez un triangle FpC des trois lignes données FC, p F, pC, & menez C P parallèle à p F, & F P parallèle à p C, vous aurez un Parallélogramme dont les côtés p C, PC déterminent la direction des forces cherchées, comme il est évident.

84. Coroll. Il est maintenant facile d'expliquer comment les forces p C, PC, (fig. 2) dont la somme excéde la résultante F C, n'ont cependant pas plus d'effet par leur action réunie, pour pousser de C en B, le corps qu'elles animent, que la seule force FC. Car si des points p, P, on méne sur FC les perpendiculaires p S, PT, & si on

achève les Parallélogrammes HS, TK, on connoîtra par tout ce qui a été dit jusqu'ici, que la force p C peut être décompensée en deux forces p H, p S, qui animant à la fois le corps C, sont capables de produire le même effet que la force p C : de même la force PC peut être décomposée en PK, PT. Or le corps C étant toujours animé de ces quatre forces pendant tout son mouvement ; en vertu de celles qui sont représentées par PT, p S, ou par leurs égales HC, KC perpendiculaires à la ligne FB, opposées directement, & égales entr'elles (car p S, PT sont deux perpendiculaires menées du sommet des deux triangles égaux FCP, FC p sur leur base commune FC) il ne peut s'approcher ni s'éloigner de FB, mais il doit rester dans cette ligne. Reste donc qu'il n'y ait que les forces p H, PK, ou leurs égales SC, TC, qui poussent le corps C vers B : Mais TC = FS, (parce que les segments FT, TC de la base FC doivent être égaux aux segments FS, SC). Donc FS, SC représentent les véritables efforts des puissances P, p sur le corps C pour le pousser de C en B. Or il est clair que la somme de ces efforts est égale à l'effort seul de la force FC : donc quoique la somme des forces PC, p C soit plus grande que la force FC, ces deux forces, en agissant à la fois, ne doivent cependant pas avoir plus d'effet que cette seule force FC.

85. REMARQUE I. C'est l'obliquité de la direction de ces forces l'une à l'égard de l'autre qui détruit dans chacune une partie égale de leur effet absolu pour pousser le corps de C vers B, & cette partie est d'autant plus grande, que l'angle de ces directions est plus grand & au contraire. Car si l'angle étoit infiniment grand, ces directions seroient opposées entr'elles, la plus petite force seroit totalement détruite par une partie égale de la plus grande, & le corps iroit suivant la direction de cette plus grande force, avec une vîtesse proportionnée à son excès sur la plus petite, suivant le second cas du Théorême I. (*66*). Et si l'angle des directions étoit infiniment aigu, elles concourroient toutes deux à pousser le corps suivant leur direction com-

mune, & avec une vîtesse proportionnée à la somme des forces, suivant le I. cas du même Théorême.

86. Les droites PC, *p*C représentent les *forces absolues* des puissances P, *p*, & les droites TC, SC qui expriment la quantité réelle de leurs efforts sur le corps C, pour le pousser de C en B, représentent les *forces relatives* des puissances P, *p*. D'où on peut conclure : *Que les puissances ne produisent d'effet que par leurs forces rélatives, & dans la direction de ces mêmes forces rélatives.*

87. REM. II. Toute cette Théorie de la composition & de la décomposition des forces peut-être déduite de ce principe. *Deux forces qui agissent à la fois sur un corps dans des directions obliques l'une à l'autre, ne peuvent mettre ce corps en mouvement, que ce que ces forces ont d'opposition, à cause de l'obliquité de leurs directions, ne soit entiérement détruit, & alors le corps n'est mû qu'en vertu de la somme des deux restes de force après cette destruction.* Si donc ces forces & leurs directions sont représentées par des droites données de longueur & de position, 1°. Ce qu'il y a d'opposé dans ces deux directions doît être totalement détruit. Or deux choses opposées ne se peuvent totalement détruire réciproquement, qu'elles ne soient égales: donc ce qu'il y a d'opposé dans les deux directions doit être représenté par deux droites égales aboutissantes en sens directement contraires. 2°. Ce qui reste après cette destruction doit être représenté par une droite égale à la somme de chacun des deux restes, & qui n'ait aucune obliquité à l'égard des directions détruites: elle doit donc être perpendiculaire à ces directions détruites.

88. Cela posé, que *p* C, PC (fig. 2.) représentent les deux forces qui agissent sur le corps C. Ayant joint *p* P, & fait passer par son milieu I une droite indéfinie CF, si on y abbaisse les perpendiculaires *p* S, PT, elles seront égales entr'elles, à cause des deux triangles rectangles *p*IS, PIT qui sont égaux, puisque IP = I*p*, & TP parallèle à *p* S. Si ensuite par C on mene KH perpendiculaire à FC, puis par *p*, P les parallèles PK, *p*H, il est clair que les droites KC, HC étant égales, & venant

aboutir l'une à l'autre en sens opposé, doivent représenter ce que les directions obliques PC, p C ont d'opposition; & que TC, SC, ou leurs égales PK, pH perpendiculaires à KH expriment ce qui reste après la destruction de l'opposition. Donc le corps C ne doit se mouvoir que dans la direction TC ou SC avec une force représentée par la somme TC + SC. Donc pour avoir une droite égale à cette somme, il faut porter TC de S en F, afin d'avoir CF = SC + TC, & qu'ainsi FC représente la somme des deux restes de forces, en vertu de laquelle le corps est mu.

Maintenant puisque SF = FT + TS, & CT = CS + ST, il suit que FT = CS; or dans les triangles égaux pSI, PTI, on a IT = IS; donc FI = IC. Donc si on joint pF, PF, les triangles FIp, CIP ont les côtés p I = IP, IF = IC & l'angle compris égal. Donc (Elem. 508.) ils sont égaux: donc l'angle p FC = FCP : Donc p F est parallèle à CP. On démontre de même que PF est paralèlle à pC. Donc le quadrilatère p FPC est un Parallélogramme dont FC est la Diagonale. Donc la force résultante des deux forces obliques pC, PC, est exprimée par la Diagonale FC.

89. PROBLEME II. *Trois puissances concourant en un point par des directions qui ne soient pas dans un même plan, trouver la direction & l'expression d'une seule force composée équivalente.*

SOLUT. Soient PC, QC, p C (fig. 4.) les directions de trois puissances qui agissent à la fois sur un point C, & qui sont situées en différents plans. Puisque deux droites qui se rencontrent sont (Elem. 626) dans un même plan il est clair 1°. qu'en tirant PD parallèle à p C, & p D parallèle à PC, on forme un Parallélogramme pDPC dans le plan duquel les puissances PC, p C, exercent leurs forces. On aura de même le Parallélogramme CPAQ pour le plan commun des forces PC, QC, & le Parallélogramme CQEp pour le plan commun des forces QC, pC; de sorte qu'en menant EB parallèle à pD, & DB parallèle à p E, puis joignant AB, on forme un parallélopipede. 2°. Que deux des forces quelconques, comme PC, QC se

peuvent réduire à une ſeule exprimée par AC, laquelle eſt dans un des deux plans diagonaux du parallélopipède, & qu'enfin la force composée des forces AC, *p*C eſt repréſentée par la poſition & par la longueur de BC, qui eſt une diagonale du parallélopipède.

On pourra raiſonner à peu près de la même manière ſur tant de puiſſances qu'on voudra, qui agiſſent dans des plans différents ſur un même mobile.

Du mouvement rectiligne uniformément accéléré, ou de la chûte libre des corps, & de leurs mouvemens ſur des plans inclinés.

90. UN corps ſe meut uniformément, quand il n'a reçu d'impulſion que dans le premier inſtant de ſon mouvement ; & ſi dans le cours de ſon mouvement il vient à en recevoir une nouvelle dans le même ſens, ſa vîteſſe augmente dans l'inſtant, puis il continue d'aller uniformément avec cette nouvelle vîteſſe. Mais s'il reçoit à chaque inſtant une nouvelle impulſion, ſa vîteſſe s'accélére de plus en plus, & ſi cette nouvelle impulſion eſt toujours égale & ſe fait en tems égaux, ſa vîteſſe s'accélére uniformément, & ſon mouvement eſt dit *uniformément accéléré.*

91. La force qui donne au corps à chaque inſtant une nouvelle impulſion, s'appelle *force accélératrice* : & ſi à chaque inſtant égal, cette impulſion eſt égale, la force qui la donne s'appelle *force accélératrice conſtante.*

92. Par une raiſon contraire, ſi un corps qui avoit d'abord une certaine vîteſſe, vient à en perdre des parties égales à chaque inſtant égal, par autant d'impulſions égales dans un ſens oppoſé directement à celui de ſon mouvement, ce mouvement devient uniformément retardé.

93. Ces deux mouvemens ont préciſément les mêmes propriétés en ſens contraire, & ce qu'on dit de l'un doit s'entendre de l'autre, de la même manière que ce qu'on dit d'une progreſſion croiſſante, doit s'appliquer à une décroiſſante.

94. Le mouvement uniformément accéléré est une suite de mouvemens uniformes en progression Arithmétique croissante. Dans un tems fini cette progression est finie, si chaque degré de vîtesse ne s'acquiert qu'au commencement de chaque instant fini, comme de minute en minute, ou de seconde en seconde, & alors l'accélération se fait par sauts : mais la progression est infinie ; si les degrés de vîtesse s'acquierent à chaque instant infiniment petit. C'est de cette dernière espèce dont nous allons parler, parce qu'elle est la plus ordinaire.

95. THEOR. I. *Dans le mouvement uniformément accéléré, le nombre des degrés de vîtesse acquis à chaque instant est comme le nombre de ces instants ;* & par conséquent *les vîtesses acquises & les tems sont depuis le commencement du mouvement, comme la suite naturelle* 1, 2, 3, 4, 5, &c. C'est une suite évidente de la notion du mouvement uniformément accéléré.

96. THEOR. II. *Dans le mouvement uniformément accéléré, l'espace* e *parcouru pendant un certain tems fini* t, *compté depuis le commencement du mouvement, n'est que la moitié de l'espace que parcourroit uniformément dans le même tems* t, *un corps qui auroit une vitesse* u *égale à celle qui se trouve acquise par l'accélération, à la fin du tems* t. Ou bien, *la formule de l'espace, est dans le mouvement uniformément accéléré*, $e = \frac{ut}{2}$, *au lieu que dans le mouvement uniforme* $e = ut$ (49).

DEM. Partagez le tems t en une infinité d'instants égaux, & puisque u exprime la vîtesse acquise à la fin du tems t, les degrés de vîtesse pendant chacun de ces instants seront exprimés (94) par cette progression Arithmétique $\div \frac{1u}{\infty} \cdot \frac{2u}{\infty} \cdot \frac{3u}{\infty} \cdot \frac{4u}{\infty} \ldots\ldots$ dont le dernier terme est $\frac{\infty u}{\infty} = u$. Or (61) pendant chaque instant égal & infiniment petit, le mouvement étant uniforme, chaque espace parcouru est (51) comme la vîtesse. Donc chaque terme de cette progression est proportionnel à chaque espace parcouru pendant chaque instant, & la somme de tous ces termes, représente l'espace total e parcouru pen-

dant la durée t du mouvement. Mais (Elem. 280) la somme des termes de cette progression est égale au produit de la somme $\frac{1u}{\infty} + u$ des extrêmes, multipliée par la moitié du nombre des termes, c'est-à-dire, par la moitié du nombre des instans, ou par $\frac{t}{2}$. Donc $e = (\frac{u}{\infty} + u) \times \frac{t}{2}$ $= \frac{ut}{2\infty} + \frac{ut}{2}$. Donc, à cause du terme infiniment petit $\frac{ut}{2\infty}$, on a $e = \frac{ut}{2}$.

97. COROLL. I. *Dans un mouvement uniformément accéléré les espaces parcourus en des intervalles de tems finis égaux & consécutifs, comme de seconde en seconde, sont entr'eux, depuis le commencement du mouvement, comme les termes de la suite naturelle des nombres impairs*, 1, 3, 5, 7, 9, &c.

Car pendant la durée de chaque intervalle t de tems, les espaces sont parcourus en vertu & des degrés de vîtesse qui se trouvent acquis au commencement de chaque intervalle, & de celui qui s'acquiert pendant cet intervalle. Or (95) les vîtesses acquises au commencement de chaque intervalle consécutif sont, $0u$, $1u$, $2u$, $3u$, $4u$, &c. Donc les espaces parcourus en vertu de ces vîtesses, sont (49) $0tu$, $1tu$, $2tu$, $3tu$, $4tu$, &c. & les espaces parcourus en vertu du nouveau degré de vîtesse u qui s'acquiert pendant chaque intervalle t, est $\frac{tu}{2}$ (96). Donc les espaces entiers parcourus pendant chaque intervalle t en vertu, & des vîtesses acquises, & de celles qui s'acquierent, sont, $0tu + \frac{tu}{2}$, $1tu + \frac{tu}{2}$, $2tu + \frac{tu}{2}$, $3tu + \frac{tu}{2}$, $4tu + \frac{tu}{2}$, &c. ou bien $\frac{1tu}{2}$, $\frac{3tu}{2}$, $\frac{5tu}{2}$, $\frac{7tu}{2}$, $\frac{9tu}{2}$, &c. Or il est clair (14) que tous ces termes, sont entr'eux comme la suite 1, 3, 5, 7, 9, &c.

98. COROLL. II. *Dans un mouvement uniformément accéléré les espaces comptés depuis le commencement du mouvement jusqu'à la fin de chacun des intervalles égaux de tems, sont entr'eux comme la suite naturelle des quarrés* 1, 4, 9, 16, 25, &c.

Car depuis le commencement du mouvement jusqu'à la fin du premier intervalle de tems, l'espace est 1 ; jusqu'à la fin du second espace total, c'est $1 + 3 = 4$; jusqu'à la fin du troisième, c'est $1 + 3 + 5 = 9$; jusqu'à la fin du quatrième, c'est $1 + 3 + 5 + 7 = 16$; jusqu'à la fin du cinquième, l'espace total est $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$, &c.

99. COROLL. III. *Dans un mouvement uniformément accéléré, les espaces parcourus depuis le commencement du mouvement, jusqu'à la fin de chacun des intervalles égaux de tems, sont entr'eux comme les quarrés des tems, ou comme les quarrés des vîtesses acquises, de sorte qu'on peut faire* $e = tt$, *ou* $e = uu$.

Car la suite naturelle des nombres 1, 2, 3, 4, 5, &c. exprime les tems ou les degrés de vîtesses acquises (95) & la suite des quarrés consécutifs 1, 4, 9, 16, 25 &c. exprime les espaces parcourus depuis le commencement du mouvement jusqu'à la fin des tems correspondants.

100. REMARQUE I. On voit à l'œil que les corps pesants tombent par un mouvement accéléré, & qu'étant poussés de bas en haut, ils s'élevent avec un mouvement retardé. L'expérience a fait connoître que ces mouvemens sont uniformément accélérés & retardés : Galilée est l'Auteur de cette découverte, & de toute la Théorie du mouvement uniformément accéléré. Toutes les expériences qui ont été faites depuis, l'ont tellement confirmée, qu'il ne seroit pas raisonnable de la révoquer en doute, ni de faire d'autres suppositions pour expliquer les Phénomenes de la pesanteur.

101. Il faut donc concevoir la pesanteur (quelle qu'en soit la cause), comme une force accélératrice constante, qui à chaque instant donne à chaque molécule, ou particule de matière qui compose un corps, un coup dirigé au centre de la terre. Un plan qui supporte un corps, ou une main qui le retient en l'air, soutient tous ces efforts de la pesanteur, dont la somme s'appelle *le poids* du corps : si donc on ne soutient plus ce corps, le coup que la pesanteur donne à tout moment à chacune de ses molécules n'étant plus repoussé, le corps commence à tomber avec un degré de vîtesse : dans l'instant suivant, la pesanteur

donne un autre coup, & l'effet de ce second coup se joint à celui du premier coup, lequel subsiste toujours par l'inertie de la matière, de sorte que le corps acquiert par ce moyen deux degrés de vîtesse. Au troisième instant la pesanteur donne encore un coup, qui joint aux deux précédents, fait qu'à la fin de cet instant, le corps a trois degrés de vîtesse, & ainsi de suite.

102. Mais si on pousse un corps perpendiculairement de bas en haut, ce corps reçoit dans le premier instant qu'il se trouve libre, un coup dirigé vers la terre; ce coup lui fait perdre un petit degré de la vîtesse qu'on lui avoit donnée : au second instant il reçoit un second coup qui lui fait perdre un second degré de vîtesse : au troisième instant il en perd encore un par un nouveau coup, & ainsi de suite.

103. Il suit de tout cela, I°. *Que la force qu'un corps pesant a acquise en tombant, est égale à celle qui peut le faire remonter à la même hauteur d'où il est descendu.*

104. II°. *Que la force qui pousse un corps de bas en haut, le pousseroit à une hauteur double, si son mouvement n'étoit pas retardé par la pesanteur* (96).

105. III°. *Que la pesanteur des corps, ou leurs poids, est proportionnelle à leur masse :* c'est une propriété qui a été d'ailleurs constatée par une infinité d'expériences, & surtout par celles de M. Newton.

106. IV°. Donc *quelle que soit la figure d'un corps qui a une certaine masse, son poids doit être toujours le même.*

107. V°. *Que les corps les plus denses, doivent être les plus pesants, toutes choses d'ailleurs égales.*

108. REMARQUE II. Il faut bien observer que tout ce qui vient d'être dit sur la pesanteur, doit s'entendre des corps à qui l'air fait une résistance insensible, ou plus rigoureusement, cela n'est exact qu'à l'égard des corps qui sont dans un espace parfaitement vuide d'air. Ainsi une balle de plomb, par exemple, qui a peu de surface en comparaison de son poids, suivra à très-peu près ces règles; mais si on en faisoit une boule creuse d'un grand diamètre, alors l'air résisteroit d'autant plus à son mouvement

vement, qu'elle auroit plus de surface : de sorte qu'il se pourroit faire que cette boule creuse fût si grosse, & l'épaisseur du plomb si petite, qu'elle se tiendroit dans l'air, en voltigeant sans tomber, à peu près comme un brin de duvet. Car on démontre par expérience que c'est l'air seul qui résiste à la chûte des corps, & qui en retarde la vîtesse, soit en montant soit en descendant : Par exemple, si on suspend au sommet d'un long récipient de Machine Pneumatique, un corps extrêmement pesant, comme de l'or, & un corps extrêmement leger comme un bout de plume, après qu'on en a pompé l'air, ces corps tombent avec une égale vîtesse.

109. A l'égard des corps à qui l'air fait peu de résistance, on a trouvé par expérience, & nous en ferons le calcul dans la suite d'après M. Huygens, qu'ils tombent de 15,1 pieds à très-peu-près dans la première seconde de leur chûte. D'où il suit *que les espaces parcourus de seconde en seconde de tems par un corps qui tombe, doivent être exprimés par cette suite* 1 × 15,1. 3 × 15,1. 5 × 15,1. 7 × 15,1 &c. Et qu'ainsi pour sçavoir tout d'un coup l'espace qu'un corps parcourt pendant une seconde déterminée dans le tems de sa chûte, il faut multiplier par 15,1 le double du quantième de la seconde moins 1. Ainsi pour avoir l'espace parcouru pendant la quatrième seconde de la chûte, il faut multiplier 15,1 par 8 — 1 ; c'est-à-dire, par 7, & le produit 105,7 pieds sera l'espace demandé.

110. Pour sçavoir en combien de tems un corps tombera d'une hauteur donnée, comme de 540 pieds, il faut faire comme 15,1 pieds à 540 pieds : ainsi 1 quarré de la première seconde est à 36 environ, quarré de la dernière seconde : dont la racine 6 fait voir que le corps tombera en 6 secondes de tems.

111. En renversant cette Analogie, on trouvera de quelle hauteur il doit tomber dans un tems donné.

112. REMARQUE III. On verra dans la suite que la pesanteur n'est pas par-tout la même ; mais qu'elle varie en raison inverse des quarrés des distances au centre de la

terre. Ainsi un corps qui seroit éloigné du centre de la terre d'un diametre entier, ou de 3000 lieues ne tomberoit que de 3 pieds $\frac{3}{4}$ dans la première seconde de sa chûte. Cependant la pesanteur est sensiblement constante dans un petit intervalle, comme de 1000 ou 1200 toises au-dessus de la surface de la terre.

Formules pour le Mouvement uniformément accéléré.

113. Des deux Théorêmes précédens on peut déduire les douze formules suivantes, qui expriment les rapports que peuvent avoir entr'elles les forces accélératrices constantes p, les vîtesses u acquises à la fin d'un instant quelconque, les espaces e parcourus depuis le commencement du mouvement, & les tems t employés à les parcourir.

$$p = \frac{e}{tt} \qquad u = 2pt \qquad e = \tfrac{1}{2}ut \qquad t = \frac{2e}{u}$$

$$p = \frac{uu}{4e} \qquad u = \frac{2e}{t} \qquad e = ptt \qquad t = \sqrt{\frac{e}{p}}$$

$$p = \frac{u}{2t} \qquad u = 2\sqrt{ep} \qquad e = \frac{uu}{4p} \qquad t = \frac{u}{2p}.$$

Les formules où la quantité p n'entre pas, sont tirées du second Théorême, suivant lequel la vitesse u est capable de faire un double effet dans un mouvement uniforme ; ainsi $u = \frac{e}{t} \times 2$ ou $u = \frac{2e}{t}$. On a les autres par de simples substitutions.

Les formules où p entre, sont fondées sur ce que les espaces croissent, & comme les quarrés des tems (99), & comme la quantité de la force accélératrice p. Donc (16) $e = ptt$.

Suivant les expériences que nous avons citées (109), la valeur de p sur la surface de la terre & dans la chûte libre des corps, est de 15, 1 pieds, quand celle de t est exprimée en secondes.

114. THEOREME III. *Si un corps* C (*fig.* 6.) *descend librement le long d'un plan incliné* A D ; 1°. *Son mouvement*

est uniformément accéléré. 2°. Sa vitesse acquise depuis son départ en A jusqu'à son arrivée en D, est à celle qu'il auroit acquise en même tems en tombant librement, comme la hauteur AB du plan incliné est à sa longueur AD.

DEM. 1°. Le Corps C étant sur un point quelconque F, tirez de son centre C une perpendiculaire CG à la base DB du plan incliné, ou à l'horison : cette ligne représentera la force absolue de la pesanteur qui pousse le corps C vers le centre de la Terre. Si on la décompose en deux, dont l'une CF soit perpendiculaire au plan incliné, & l'autre CH parallèle à ce plan, la ligne CF représentera une partie de la pesanteur qui est détruite par le plan qui soutient le corps, & la ligne CH ou FG représentera le reste de la pesanteur, ou sa force rélative qui agit sur le corps pour le faire descendre. Donc la force qui agit sur le corps C pour le faire descendre, est à celle qui le feroit tomber perpendiculairement en embas sans le plan incliné, comme FG à CG, ou (à cause des triangles rectangles semblables DAB, CFG) comme AB à AD. Or puisqu'en quelqu'endroit que soit posé le corps C, le triangle CFG est toujours le même, la force FG sera toujours appliquée au corps C, de la même manière que la force CG lui seroit appliquée, si ce n'étoit le plan incliné : mais la force CG feroit tomber le corps C par un mouvement uniformément accéléré : Donc la force FG le fait descendre aussi par un mouvement uniformément accéléré.

2°. Les accroissemens de vitesse tant dans le corps qui descend de A en D, que dans celui qui tomberoit librement, sont à chaque instant infiniment petit comme les forces qui les produisent, c'est-à-dire, comme FG à CG, ou comme AB à AD. Donc la somme de tous ces accroissemens, c'est-à-dire, la vitesse acquise en descendant tout le long du plan incliné, est à la somme de tous les accroissemens de vitesse du corps qui tomberoit librement, ou à la vitesse acquise par sa chûte, comme AB est à AD (Elem. 310).

115. COROLL. I. Il suit de-là que *la force qui fait descendre un corps le long d'un plan incliné n'est que la pesanteur diminuée dans le rapport de la hauteur du plan incliné à sa longueur*, de sorte que les vitesses acquises sont comme les tems, & ceux-ci sont comme la suite naturelle 1. 2. 3. 4. 5. &c. (95). Que les espaces parcourus depuis A sont comme 1. 4. 9. 16. 25 &c. (98). Et les espaces parcourus entre chaque intervalle de tems comme 1. 3. 5. 7. 9. &c. (97). Qu'enfin l'espace parcouru depuis A jusqu'en F ou en D, n'est que de la moitié de celui que le corps auroit parcouru en même tems uniformément avec la vitesse acquise en F ou en D (96).

116. COROLL. II. *Si du point* B *on mene la perpendiculaire* BK ; AK *sera l'espace parcouru par le corps* C, *tandis que ce corps tomberoit librement de* A *en* B. Car à cause de l'angle droit en B, on a (Elem. 561) AK : AB : : AB : AD, c'est-à-dire, AK espace parcouru en descendant de A en K, est à AB espace parcouru en tombant librement en même tems de A en B, comme AB vitesse acquise par le corps en descendant de A en D, est à AD vitesse qu'il auroit acquise en tombant librement pendant ce tems. Mais la vitesse acquise par le corps C en descendant de A en D, est à celle qu'il eût acquise en tombant librement pendant ce tems, comme AB est à AD (114). Donc tandis que le corps C descend de A en K, il tomberoit librement de A en B ; ou bien AB & AK sont des espaces qui seroient parcourus en même tems.

117. COROLL. III. Donc quand un corps qui descend sur un plan incliné est dans un point K quelconque, si on veut déterminer l'espace qu'auroit parcouru en même tems un corps qui seroit tombé du même point A, il faut élever une perpendiculaire KB au plan incliné, qui déterminera sur AB le point B qu'on cherche.

118. COROLL. IV. *Un corps employe autant de tems à descendre le long d'une corde* AK *quelconque d'un cercle, qu'à tomber librement le long de son diamètre* AB (fig. 11.) puisqu'en tirant KB, l'angle AKB devient droit (Elém. 468).

Ainsi *les temps de la descente le long de toutes les cordes d'un même cercle sont égaux entr'eux : & si* A *est un point de contact commun à plusieurs cercles, des corps qui descendroient en même tems le long des cordes* AK, AD, AB, AE, *parcourroient en tems égaux les parties* kK, dD, bB, eE.

119. COROLL. V. Deux corps étant partis en même tems d'un même point A, (fig. 6.) & descendants le long de deux plans AD, AM différemment inclinés, si l'on veut déterminer où est le corps qui parcourt AM, lorsque l'autre corps est en K, il faut élever la perpendiculaire KB, & par le point B où elle rencontre la verticale AB, il faut abaisser sur AM la perpendiculaire BL, & le point cherché sera L.

120. COROLL. VI. *Le tems que le corps* C *emploie à descendre de* A *en* D, *est à celui qu'il employeroit à tomber de* A *en* B, *comme* AD *est à* AB. Car à cause du mouvement uniformément accéléré, le quarré du tems de la descente par AD, est au quarré du tems de la descente par AK, comme AD à AK (99): Or (Elem. 561.) $\div$ AD. AB. AK, donc (Elem. 318.) AD^2. AB^2 : : AD. AK : donc le quarré du tems par AD est au quarré du tems par AK, comme AD^2 à AB^2. Donc (Elem. 308.) le temps de la descente le long de AD, est au tems de la descentte le long de AK, c'est-à-dire (116) de la chûte libre le long de AB, comme AD à AB.

121. COROLL. VII. *Les tems employés à descendre le long de tant de plans inclinés de même hauteur qu'on voudra, sont entr'eux comme les longueurs de ces plans.* Car AD est à AB, comme le tems employé à descendre de A en D, est au tems employé à tomber de A en B (120) : par la même raison AM est à AB, comme le tems employé à descendre de A en M est au tems employé à tomber de A en B. Donc le tems employé à descendre de A en D, est au tems employé à descendre de A en M, comme AD est à AM.

122. COROLL. VIII. *Les vîtesses acquises à la fin des descentes le long de tant de plans inclinés qu'on voudra* AD, AM,

qui ont une même hauteur AB, *sont égales entr'elles*, *& à celle qui est acquise en* B *par la chûte d'un corps de* A *en* B. Car puisque les espaces AB, AK sont parcourus par un mouvement uniformément accéléré, la vîtesse acquise en B est à la vîtesse acquise en K, comme $\frac{2AB}{T}$, à $\frac{2AK}{t}$, (113) ou à cause des tems égaux $T = t$, & des coéfficiens constans 2, comme AB à AK, ou à cause des Triangles rectangles semblables AKB, ABD, comme AD à AB. Mais (99) le quarré de la vîtesse en D est au quarré de la vîtesse en K, comme AD à AK, & (Elem. 561) $\div$ AD. AB. AK: Donc (Elém. 318) AD : AK :: AD^2 AB^2. Donc le quarré de la vitesse en D, est au quarré de la vitesse en K, comme AD^2 à AB^2. Donc (Elém. 308) la vitesse acquise en D est à la vîtesse acquise en K, comme AD à AB, ou comme la vîtesse acquise en B est à la vîtesse acquise en K. Donc (Elem. 306.) la vitesse en D est égale à la vitesse en B. Par un même raisonnement la vitesse en M est égale à la vîtesse en B, & par conséquent égale à la vîtesse acquise en D; & ainsi de tant d'autres qu'on voudra.

123. REMARQUE. Par des raisons contraires on verra qu'un corps qui monte le long d'un plan incliné en vertu d'une force qui lui a été imprimée, y monte par un mouvement uniformément retardé, & qui a les mêmes propriétés que le corps qui seroit jetté en l'air perpendiculairement. Pour y appliquer la Théorie précédente, il faut tout compter depuis le point où il a totalement perdu sa vitesse, & où il cesse de monter.

Du Mouvement rectiligne rélatif.

124. IL faut ici se rappeller le mouvement de la boule qui roule le long du bord A *n* (fig. 8) du vaisseau pour aller toucher le point *n* (64). Il est clair qu'un homme posé en A la voit aller tout le long du bord A*n* suivant une direction perpendiculaire au côté AQ & à la route AG

du vaiſſeau, quoique cette boule aille réellement de A en *l* ſuivant une direction A*l* inclinée à ce côté & à cette route, & qui eſt la Diagonale du Parallélogramme *mn*: que par conſéquent A*l* étant la direction du mouvement abſolu, A*n* eſt celle du mouvement relatif de cette boule par rapport au corps en A, qui ſe meut lui-même le long de AG, avec une viteſſe égale à celle du vaiſſeau, & qui ſe croit immobile en A.

125. THEOREME I. *Si deux corps* A *&* B *ſe meuvent dans une même droite & ſuivant la même direction ; la vîteſſe relative de* A *par rapport à* B *qui ſe croit immobile, eſt, ou nulle, ſi leurs vîteſſes abſolues, ſont égales; ou comme la différence de leurs vîteſſes abſolues, ſi elles ſont inégales ; & alors ſi* A *va plus vîte, la direction de la vîteſſe relative eſt auſſi dans le même ſens; mais ſi* B *va plus vite, elle eſt dans le ſens contraire. Et ſi leurs directions ſont en ſens contraire, la viteſſe relative de* A *par rapport à* B *eſt comme la ſomme de leurs viteſſes abſolues, & elle ſe fait dans la direction du corps* A.

DEM. Car il eſt clair que ſi deux corps partent d'un même point avec une même viteſſe dans un même ſens, ils iront toujours enſemble ſans anticiper l'un ſur l'autre. Donc ſi l'un ſe croit immobile, l'autre lui paroit auſſi immobile.

Mais ſi A a plus de viteſſe que B, alors A anticipera ſur B de l'excès de ſa viteſſe ; donc B ſe croyant immobile verra le corps A ſe mouvoir dans la direction de la viteſſe abſolue de A, avec une viteſſe relative égale à l'excès de cette viteſſe abſolue ſur celle de B : ſi au contraire B va plus vite que A, ce ſera B qui anticipera ſur A ; donc A paroîtra à B reculer avec une viteſſe relative égale à l'excès de la viteſſe abſolue de B ſur celle de A.

Enfin ſi les directions des viteſſes abſolues ſont oppoſées, A s'écartera d'autant plus de B qu'ils auront chacun plus de viteſſe. Donc alors B ſe croyant immobile, attribuera au corps A une viteſſe égale à la ſomme des viteſſes abſolues de A & de B.

126. COROLL. Puiſque en tems égaux les viteſſes ſont

comme les espaces parcourus uniformément, il suit que *si on connoit la distance de deux corps qui se mouvans uniformément sur une même ligne droite, tendent à se rencontrer, & si on connoit les espaces que chacun y parcourt dans un tems donné, on trouvera l'instant du concours & le point où il se fera* Il ne faudra faire que ces deux proportions, comme la somme des espaces parcourus dans le temps donné, si les corps vont en sens contraire, ou comme leur différence s'ils vont dans le même sens, est à ce temps : ainsi la distance donnée, est à l'intervalle de tems compris entre l'instant où les corps étoient à la distance donnée, & l'instant de leurs concours.

Pour avoir le lieu du concours, on fera comme le temps donné, est à l'espace que parcourt un des deux corps dans ce tems : ainsi le tems trouvé dans la précédente Analogie, est à la distance de ce corps au point de concours. C'est ainsi qu'on calcule le tems & le lieu des conjonctions des Planetes.

127. PROBLEME. *Un corps* A (fig. 7, 8 & 9) *allant uniformément de* A *vers* L, *tandis qu'un corps* B *va uniformément de* B *vers* M, *déterminer la direction & les circonstances du mouvement rélatif de* A *par rapport à* B, *qui croit rester toujours en* B.

SOLUTION. Soit la vitesse de A $= a$, celle de B $= b$. Prenez une partie quelconque AL & faites $a : b :: \mathrm{AL} : \mathrm{BM}$, & le corps A sera en L dans le même instant que le corps B sera en M. (51). Tirez ML, & par le point B menez BN paralléle & égale à ML, & parce qu'alors le point N est par rapport au point B situé de la même maniere, & à la même distance, que le point L par rapport au point M, il suit que si le corps B qui est réellement en M s'imagine être en B, le corps A qui est réellement en L, lui doit paroitre en N. On voit de même que lorsque le corps B sera réellement en m, & le corps A en l, en tirant Bn paralléle & égale à ml, le corps B qui se croit toujours en B, s'imaginera voir le corps A en n. D'où il suit 1° que le corps A, qui par son mouvement absolu se meut suivant AL paroîtra se mouvoir le long de AN. 2°. Qu'à cause que AL, & B sont donnés de position, & que LN est égale

& parallèle à BM, *ln* égale & parallèle à B*m*, les triangles ANL, A*nl* sont aussi déterminés de position & semblables; d'où il suit 3°. que N *n*, mouvement rélatif, est toujours à L*l*, mouvement absolu, dans un rapport constant.

REM. On peut appeller le point M le *vrai lieu de l'œil* du corps B, le point B *le lieu imaginaire de l'œil* du corps B, le point L *le lieu absolu* du corps vu A, & le point N *le lieu rélatif* du corps vu.

128. COROLL. I. *Le vrai lieu de l'œil, son lieu imaginaire, le lieu absolu du corps vu, son lieu rélatif sont aux quatre angles d'un parallélogramme*; de sorte que le lieu imaginaire de l'œil & le lieu absolu du corps vu sont à deux angles opposés, & que le vrai lieu de l'œil, & le lieu rélatif du corps vu sont aux deux autres angles opposés, & par conséquent ils sont toujours dans une situation opposée.

129. COROLL. II. *Si le mouvement absolu d'un corps est uniforme, son mouvement relatif par rapport à un corps mû uniformément, sera uniforme.*

130. COROLL. III. *Si l'espace à l'égard duquel on détermine le mouvement rélatif se meut uniformément en ligne droite, tout ce que nous avons dit jusqu'ici du repos & du mouvement absolu conviendra au mouvement rélatif.* C'est ainsi que quand un vaisseau va uniformément, ceux qui y sont renfermés ne s'apperçoivent point de son mouvement, & qu'ils y exécutent eux-mêmes librement toutes sortes de mouvements; mais quand il arrive quelque secousse, alors les corps en repos sont ébranlés, & ceux qui sont en mouvement, vont irrégulièrement.

131. COROLL. IV. *Quand un corps libre paroît se tenir dans un repos parfait, ou n'avoir qu'un mouvement uniforme en ligne droite, c'est une marque que le lieu dans lequel il se trouve est lui-même ou dans un repos absolu, ou n'a qu'un mouvement uniforme en ligne droite.*

132. COROLL. V. *Si deux corps partent d'un même point* A (fig. 8.) *le mouvement rélatif* N *n*, *est au mouvement absolu* L*l*, *comme* AN *est à* AL : à cause des triangles semblables ANL, A*nl*, & que AN = ML.

133. COROLL. VI. *Si les directions* BM, AL *étoient parallèles, la direction du mouvement relatif seroit dans la même ligne que celle du mouvement absolu.* Car puisqu'il faut que BN soit égale & paralléle à ML, elle iroit former un Parallélogramme avec AL & BM qui sont déja supposées paralléles.

134. COROLL. VII. Il est aisé de voir dans quel sens se fait le mouvement rélatif par rapport à l'absolu : Dans la fig. 8 & 9 le corps A vu de B paroit rétrograder ; & dans la fig. 7 il paroît aller dans le même sens qne sa direction véritable.

135. COROLL. VIII. *Si on connoit le mouvement absolu d'un corps* A *suivant* AL *& son mouvement rélatif suivant* AN *avec une vitesse quelconque, on déterminera le mouvement absolu du corps* B *à l'égard duquel le mouvement du corps* A *suivant* AN, *est rélatif.* Car ayant pris sur AL & sur AN deux espaces parcourus en même temps, comme AL, AN, on menera par un point B pris à volonté une parallèle BM à la droite NL, & elle sera la direction du mouvement absolu d'un corps qui se seroit trouvé en B, quand le corps A aura été en A, & dont la vitesse absolue eût été à celle du corps A, comme NL à AL.

136. COROLL. IX. *Il peut donc y avoir une infinité de corps par rapport ausquels le mouvement rélatif du corps* A *se fasse de même maniere le long de* AN ; puisque le point B est indéterminé : mais il faut pour cela que la vitesse de tous ces corps soit égale, & leurs directions sont déterminées par la position de la ligne NL.

137. COROLL. X. *Etant donné le mouvement rélatif de* A (fig. 9.) *& le mouvement absolu de* B, *il est facile de déterminer les circonstances du mouvement absolu de* A. Et d'abord pour savoir en quel point les corps A & B se trouveront le plus près qu'il est possible l'un de l'autre, on remarquera qu'à cause que les distances BN du corps B aux lieux rélatifs N du corps A, sont égales aux distances absolues ML du même corps B en M, au corps A qui est alors en L ; si du point B on abaisse sur AN la perpendiculaire BR, elle

sera (Elem. 437) la plus courte ligne qu'on puisse mener de B sur AN, & par conséquent elle marquera la plus petite distance possible à laquelle les deux corps puissent parvenir par leur mouvement absolu. Menant donc RQ parallèle à BM, & prenant BP = RQ, Q sera le vrai lieu du corps A, & P le lieu correspondant du corps B.

138. II° Pour déterminer les points où A & B se trouveront à une distance égale à une ligne donnée BN; du point B comme centre avec le rayon BN, décrivez un arc qui coupe en N la ligne du mouvement relatif, & ayant mené NL parallèle à BM & pris BM = NL, on aura les points cherchés M, L.

Ce Problême a deux solutions quand la ligne donnée est plus grande que la perpendiculaire BR, il n'en a qu'une quand elle lui est égale, & il est impossible quand elle est plus petite.

139. III°. Pour déterminer les points où A & B se trouveront dans un même plan perpendiculaire à la direction de B, il faut élever la perpendiculaire B*n*, mener *nl* parallèle à BM, & prendre B*m* = *nl*; les points cherchés seront *m* & *l*.

140. IV°. Pour déterminer ceux où A & B se trouveront dans un plan perpendiculaire à la direction du corps A, abaissez BG perpendiculaire à cette direction DA, & ayant mené GK parallèle à BM, & pris BO = GK, on aura les points cherchés O & K.

141. COROLL. XI. Enfin on peut appliquer tout ceci au mouvement uniformément accéléré ou retardé, & faire voir que quand le mouvement absolu du corps A & celui du corps B sont uniformément accélérés depuis les points A & B, le mouvement rélatif du corps A vu de B, est aussi uniformément accéléré ou retardé; parce que sa route apparente AG est toujours déterminée par des parallèles à BM; & par conséquent les espaces parcourus sur AG en tems donnés, sont toujours en même raison que ceux qui sont parcourus en mêmes tems sur AK.

142. REMARQUE. Si le corps vu A étoit immobile,

alors ſon mouvement relatif s'appelle plus proprement un mouvement apparent ; & il eſt évident qu'on peut y appliquer facilement tout ce qui a été dit ci-deſſus. On en déduira entr'autres les propriétés ſuivantes.

143. COROLL. XII. *Le corps vu étant immobile, & hors du plan où l'œil ſe meut, ſa route apparente, ſoit rectiligne ſoit curviligne, eſt une ligne égale à la route réelle de l'œil, & placée dans un plan parallèle à celui de cette route réelle de l'œil.* Car ſoient B (fig. 10) le lieu imaginaire de l'œil, A le lieu abſolu du corps vu : ſoient C, D, E, trois points quelconques pris ſur la route réelle de l'œil ſitué dans le plan de cette route, on trouve par la conſtruction du problême que *c*, *d*, *e* ſont les lieux apparents du corps vu : Or à cauſe des parallélogrammes A*c*BC, A*d*BD, A*e*BE, dont AB eſt une diagonale commune, & en même tems une interſection commune de tous les plans de ces parallélogrammes, dont les baſes BC, BD, BE ſont ſituées ſur le plan de la route de l'œil, leurs parallèles & égales A*c*, A*d*, A*e*, doivent être ſitués dans un même plan parallèle à celui de la route CDE, & former les angles *c*A*d*, *d*A*e* égaux aux angles CBD, DBE : Donc les points *c*, *d*, *e* ſont dans une ligne égale à la ligne CDE, & dans un plan parallèle ; mais ces points ſont dans une ſituation oppoſée à celle des points C, D, E.

144. COROLL. XIII. *Si le corps vu eſt dans le plan de la route de l'œil, ſa route apparente y eſt auſſi.*

145. COROLL. XIV. *Si le corps vu reſte immobile au lieu imaginaire de l'œil, ſon mouvement apparent eſt préciſément le même que le mouvement réel de l'œil, mais ſeulement dans un ſens oppoſé.* C'eſt ainſi que nous imaginant être immobiles au centre de l'univers, tandis que nous tournons réellement autour de ce centre où le Soleil eſt réellement immobile, nous croyons que c'eſt le Soleil qui tourne réellement autour de nous, comme autour d'un centre.

⁂

SECONDE PARTIE.

De la Rencontre mutuelle des Corps mus en ligne droite. De la Rencontre & de l'Opposition des Forces.

PREMIERE SECTION.

De la Rencontre mutuelle des Corps.

146. LA rencontre des corps occasionne un choc mutuel entr'eux : & si la direction des corps qui se rencontrent est dans la même ligne droite, leur choc s'appelle *choc direct :* Si leurs directions font un angle, on appelle leur rencontre, *un choc oblique.*

147. C'est un fait indubitablement assuré par l'expérience, que tous les corps en mouvement se communiquent leurs mouvemens dans leurs chocs, & que cette communication se fait de la même manière que nous avons conçu des puissances qui donnoient une impulsion aux mobiles. Il y a cependant les différences suivantes propres aux différentes sortes de corps.

148. Un corps qui seroit parfaitement dur ne pourroit communiquer son mouvement que dans un instant indivisible : & sans changer de figure à la rencontre des autres corps.

149. Le corps qui seroit parfaitement mou communiqueroit son mouvement pendant un tems fini, & ce tems seroit égal à celui que ses parties postérieures employeroient à parcourir uniformément un espace égal au diamètre de ce corps, il prendroit en même tems la figure du corps choqué s'il étoit dur, & si ce corps choqué étoit un plan dur, le corps choquant s'applatiroit en une surface infiniment mince, sans pouvoir reprendre sa figure,

150. Un corps parfaitement élaſtique communiqueroit ſon mouvement dans un tems fini ; lorſque ſes parties antérieures auroient atteint le corps choqué, ſes parties poſtérieures continueroient de s'en approcher par un mouvement uniformément retardé, juſqu'à ce que le corps choqué ait reçu toute l'impreſſion que le corps choquant puiſſe lui communiquer, de ſorte que le corps choquant perdroit ſa figure ; mais il la reprendroit auſſi-tôt par un mouvement uniformément accéléré & en ſens contraire dans ſes parties poſtérieures, en ſorte que toutes les circonſtances de la reſtitution ſeroient égales à celles de la compreſſion.

Comme il n'y a pas de corps connu qui ne ſoit en partie dur, en partie mou, & en partie élaſtique, les régles que nous allons donner n'approcheront de l'exactitude, qu'autant que les corps auxquels on les appliquera, auront plus ou moins de reſſort.

151. Theoreme fondamental. *De quelque manière que deux ou pluſieurs corps en mouvement agiſſent les uns ſur les autres, la ſomme des mouvemens, s'ils agiſſent tous dans le même ſens, ou la différence des mouvemens s'ils agiſſent en ſens contraire, eſt toujours conſtante.*

Cette propriété eſt une ſuite de l'Axiome (29) *la réaction eſt égale à l'action, & leurs effets ſont égaux en ſens contraires.* Si deux corps allant dans le même ſens viennent à ſe rencontrer, de quelque manière que ce ſoit, le corps le plus fort ne pourra changer rien au mouvement du plus foible, qu'en vertu de l'excès de ſa force rélative ſur celle de l'autre ; mais ce qu'il donnera de force au plus foible ſera détruit dans lui par la réaction du plus foible, qui produit un effet égal en ſens contraire : Donc en ce cas reſtera la même ſomme des forces, ou des quantités de mouvement. Mais s'ils ſe rencontrent, en venant de différens côtés, le plus fort ne pourra rien changer au mouvement du plus foible, qu'en vertu de l'excès de ſa force ſur celle du plus foible : Donc ce corps plus foible détruira dans l'autre par ſa réaction, une partie du mouvement égale à toute la force

qu'il peut exercer contre le plus fort ; il ne restera donc en tout que cet excès de force ou de quantité de mouvement : donc de quelque manière que des corps agissent les uns sur les autres, il reste toujours la même somme des mouvemens, s'ils vont dans le même sens, ou la même différence, s'ils vont dans des sens opposés.

Du choc Direct.

152. THEOREME I. *Si deux corps non élastiques* M, m *viennent avec des vîtesses quelconques* V, u, *se choquer en parcourant en sens opposés une même droite, leur vîtesse* c *après le choc sera la même dans tous deux, & dans la direction du plus fort, elle sera mesurée dans chacun par la différence du mouvement qu'ils avoient avant le choc, divisée par la somme de leurs masses, ou* $c = \frac{MV - mu}{M + m}$.

DEM. Car puisque (59) MV, mu est la quantité de mouvement de ces deux corps, & que la différence $MV - mu$ doit (151) subsister après, comme avant le choc, il est clair que si avant le choc $MV - mu = p$, après le choc ils n'ont d'autre force que la force p ; donc après le choc ils ne se meuvent, que comme si une seule force p les eût frappés en même tems, dans le sens du corps où s'est trouvé l'excès p. Or si une même puissance frappe à la fois deux corps quelconques contigus non élastiques, pour les faire mouvoir dans la droite où leurs centres se trouvent, le coup qu'elle donne se distribue également dans toutes leurs parties, & c'est comme si elle n'en frappoit qu'un seul dont la masse fût égale à la somme de celles de ces deux corps : donc les deux corps choqués s'en vont dans la direction du plus fort, avec des forces qui sont entr'elles comme leurs masses. Or dans ce cas la formule générale $f = mu$ (59) fait voir 1°. que leur vitesse doit être égale, puisque dans cette formule $1 = u$ quand $f = m$. 2°. Que cette vîtesse commune est égale à la force p (ou $MV - mu$) qui l'a produite divisée par la

masse $M + m$ mise en mouvement, puisque dans cette formule $u = \frac{f}{m}$. Donc après le choc les deux corps vont ensemble dans la direction du plus fort avec une vitesse $c = \frac{MV - mu}{M + m}$.

153. COROLL. I. *Si les masses & les vitesses sont égales, ou si les masses sont réciproquement comme les vitesses, le choc arrêtera leur mouvement*; car alors $MV = mu$, donc $MV - mu = 0$, & c devient une quantité infiniment petite.

154. COROLL. II. *Si les masses sont égales & les vitesses inégales, après le choc les deux corps iront dans le sens du plus prompt, avec la moitié de la différence des vitesses*; car alors $c = \frac{V - u}{2}$.

155. COROLL. III. *Si les masses sont égales, & si* m *l'un des deux est en repos, ou n'a qu'une vitesse infiniment petite; après le choc les deux corps iront dans le sens du corps en mouvement* M *avec la moitié de sa vitesse*; car alors $u = \frac{1}{\infty}$, & la formule $c = \frac{V - u}{2}$ devient $c = \frac{V}{2}$.

156. COROLL. IV. *Si les vitesses sont égales & les masses inégales, après le choc les corps iront dans le sens de celui dont la masse est la plus grande, & la vitesse de chacun sera à la vitesse qu'il avoit avant le choc, comme la différence des masses est à leur somme*; car alors $c = \frac{M - m}{M + m}$.

157. COROLL. V. *Si l'un des deux corps* M *est immobile, l'autre corps* m *après le choc restera en repos*; car alors la masse du corps immobile est censée infinie, & sa vîtesse infiniment petite, ou bien $M = \infty$, & $V = \frac{1}{\infty}$: Donc $MV = 1$, & $c = \frac{1 - mu}{\infty - m}$, qui est une quantité infiniment petite.

158. THEOR. II. *Si un corps non élastique* M *rencontre un autre corps* m *qui va plus lentement dans la même direction, il en accélérera la vitesse, de sorte qu'après le choc les deux corps n'auront*

n'auront plus qu'une même vitesse, qui sera exprimée par la somme de leurs mouvemens, divisée par la somme de leurs masses.

DEM. Car (151) avant & après le choc on a $MV+mu$ pour leur force commune. Or (60) la vitesse est comme la force divisée par la masse : donc la vitesse commune de ces deux corps est après le choc $\frac{MV+mu}{M+m}$. On conçoit en effet que le corps choquant ne peut cesser de pousser le corps plus lent, tant que celui-ci n'aura pas acquis une égale vitesse.

159. THEOREME III. *Les corps non élastiques, ou sans ressort, ne se séparent point après le choc direct ; mais les corps à ressort se séparent toujours après un choc quelconque.*

DEM. La première partie est évidente, parce que suivant les deux Théorêmes précédens, les corps non élastiques sont ou arrêtés, ou vont ensemble dans la direction du plus fort avec une vitesse égale.

Si un corps parfaitement dur, ou mou vient à rencontrer directement un plan parfaitement dur & inébranlable, ou ce qui revient au même, d'une masse infinie, on ne voit rien dans ce choc qui repousse le corps choquant : ce n'est pas sa direction, puisqu'elle tend vers le plan ; ce n'est pas le plan, puisqu'il est inébranlable, & qu'étant supposé dur, ses parties ne sont capables d'aucun mouvement particulier, qu'elles puissent communiquer au corps qui les choque ; il faut donc concevoir que le mouvement du corps choquant se distribue dans toutes les parties du corps choqué, lesquelles, à cause de leur nombre infini, n'en reçoivent chacune qu'une partie infiniment petite, & par conséquent sont censées n'en ressentir aucun effet fini. Donc les corps sans ressort ne peuvent être réfléchis dans leur choc mutuel.

160. Mais si le corps choquant a un ressort parfait, c'est-à-dire, si en s'appliquant contre un plan dur & inébranlable, il change de figure pendant le tems que le choc produit son effet, ou jusqu'à ce que la réaction du plan choqué ait éteint son mouvement rélatif dans la di-

rection du choc, & s'il reprend ensuite sa figure avec une force de restitution égale à celle de compression, mais dans un sens contraire, ce plan lui sert d'appui ; à mesure qu'il reprend sa figure, toutes ses parties reçoivent une impression dans la direction contraire à celle du choc, & par conséquent le corps retourne en arrière dans cette direction. Ce seroit la même chose si on supposoit le plan comme inébranlable, mais à ressort parfait, & le corps parfaitement dur. Et si on suppose deux corps élastiques & mobiles, il sera facile de concevoir comment ils doivent se séparer après le choc. L'effet de la compression est d'éteindre, comme dans le choc des corps sans ressort, l'opposition dans leurs mouvemens, & de leur donner, s'ils étoient inégaux en force avant le choc, une tendance pour aller avec une égale vitesse vers un même point, leur compression mutuelle est donc égale, & les fait tenir comme collés avec une égale force : mais on a supposé la force de restitution égale à la force de compression ; donc quand les deux corps commenceront à reprendre leur figure, leurs parties de contact leur serviront réciproquement d'appui, pour faire chacun un effort égal de part & d'autre, afin de s'éloigner en sens contraire (de même qu'un ressort à boudin étant d'abord bandé, puis lâché en le posant librement sur un plan, étend avec une égale force ses deux branches en sens opposés, tandis que son milieu reste immobile sur le plan, & sert de point fixe à chaque branche). Celui des deux corps qui fait son effort de restitution dans le sens de la tendance commune, se meut dans cette direction avec une force qui est la somme de la force de restitution & de la force de tendance commune ; & celui des deux corps qui a son effort de restitution dans un sens opposé à celui de la tendance commune, ne peut se mouvoir que par l'excès de ces deux forces, & dans le sens de la plus grande : son mouvement après le choc en est donc ou ralenti dans le sens de la tendance commune, ou arrêté, ou même il se fait dans le sens opposé, sélon que la force de restitution est plus petite, égale ou plus grande, que celle

de la tendance commune : donc après le choc les deux corps doivent se séparer.

161. THEOREME IV. *Si deux corps à ressort parfait se choquent, ils se séparent avec la même vitesse rélative avec laquelle ils s'approchoient avant le choc.*

DEM. Il est clair que la force avec laquelle deux corps se choquent dépend de leurs forces rélatives : que s'ils vont dans le même sens, la force du choc est égale à la différence de leurs forces rélatives, & que s'ils vont en sens opposés, la force du choc est égale à la somme de leurs forces rélatives. Mais (37) des corps à ressort parfait reprennent leur figure avec une force de restitution égale à leur force de compression, c'est-à-dire, à la force qui la leur a fait perdre, donc après le choc ils ont la même force rélative qu'auparavant, donc ils se séparent avec une force rélative égale à celle avec laquelle ils s'approchoient.

162. COROLL. Puisque les forces égales font des efforts égaux sur les mêmes corps, *la distance des corps choqués est égale dans des tems pris à égale distance de l'instant du choc.*

163. PROBLEME I. *Déterminer les circonstances du choc direct de deux corps à ressort parfait* M, m, *qui vont dans un même sens avec des vitesses quelconques* V, u.

SOLUTION. Soit M le corps poursuivant, m le poursuivi. Puisque (125) la vitesse rélative de deux corps qui vont dans le même sens est égale à la différence entre leurs vitesses absolues ; on a d'abord $V - u$ pour l'expression de la vitesse rélative avant le choc, & $MV + mu$ (151) pour celle de la quantité de mouvement.

Supposons qu'après le choc le corps M aille encore dans le même sens avec une vitesse absolue x, le corps m ira aussi dans le même sens avec une vitesse z plus grande que la vitesse x (160) : & par conséquent après le choc, la vitesse rélative sera $z - x$. Et Puisque la vitesse rélative après le choc doit être la même qu'avant le choc (161), on a $z - x = V - u$: donc $z = x + V - u$: Donc après le choc la quantité de mouvement du corps M sera Mx, & celle du corps m, sera $mx + mV - mu$. Or (151) après

un choc quelconque, fait dans le même sens la somme des mouvemens est la même qu'avant le choc. Donc $Mx + mx + mV - mu = MV + mu$: d'où on tire aisément $x = \frac{MV + 2mu - mV}{M + m}$; & substituant cette valeur de x dans l'équation $z = x + V - u$, on en tirera de même $z = \frac{2MV + mu - Mu}{M + m}$: ce sont les expressions des vitesses absolues des deux corps après le choc.

Ces deux formules peuvent servir également dans le cas où le corps M iroit après le choc dans un sens opposé à sa direction avant le choc, comme on le va voir par les régles qui suivent, & par la note qui indique l'usage des signes.

Régles pour les Corps à ressort parfait, qui vont dans un même sens se choquer directement. *

164. I°. *Le corps choqué se meut toujours dans sa même direction avec une plus grande vitesse, qu'avant le choc.* Cela est clair (160).

165. II°. *Deux corps égaux en masse vont dans le même sens après avoir échangé leurs vitesses pendant le choc :* car alors $M = m$, & les formules deviennent par la substitution $x = u$, & $z = V$. Si donc avant le choc, le choquant alloit trois fois plus vite que le choqué, après le choc le choqué va trois fois plus vite que le choquant.

166. III°. *Si un corps en choque un autre égal en masse & en repos ; le choquant reste en repos après le choc, & le choqué va dans la même direction, & avec la même vitesse que celle qu'avoit le corps choquant avant le choc.* Car alors $u = 0$, donc $x = 0$, & $z = V$.

* Pour faire usage de ces formules & des suivantes, il faut se ressouvenir que quand il y a un point fixe, une ligne fixe, un plan fixe, &c. auquel on rapporte des quantités ou des lignes, toutes celles qui soit dans le lieu fixe sont = o, & si on a déterminé que toutes celles qui sont d'un certain côté sont positives, celles qui seront de l'autre côté seront négatives ou précédées du signe −; si on a marqué par le signe + celles qui vont de droite à gauche, il faudra marquer par − celles qui vont de gauche à droite; si on a marqué par + celles qui montent, il faudra marquer par − celles qui descendent. De cette sorte après les calculs, on trouve la situation des quantités qui en résultent, par le signe dont elles sont précédées.

167. IV°. *Le corps choquant restera en repos après le choc, si* $mV = MV + 2mu$, *ou si* $M : m :: V - 2u : V$. Car alors il est clair que $\frac{MV + 2mu}{M + m} - \frac{mV}{M + m} = 0$, donc $x = 0$.

168. V°. *Le corps choquant reculera après le choc, si* mV *est plus grand que* $MV + 2mu$. Car alors $\frac{MV + 2mu}{M + m}$ $- \frac{mV}{M + m}$ sera une quantité négative; donc la valeur de x sera aussi négative, & dans le sens opposé à la première direction du corps M.

169. VI°. *Si le corps choqué est en repos, & si sa masse est plus petite que celle du choquant, après le choc ils vont tous deux dans la direction qu'avoit le corps choquant avant le choc.* Car alors $u = 0$, donc $x = \frac{MV - mV}{M + m}$, & $z = \frac{2MV}{M + m}$. Or M étant plus grande que m; M multipliée ou divisée par la même quantité qui multiplie ou qui divise m, sera toujours plus grande. Donc $\frac{MV}{M + m} - \frac{mV}{M + m}$ est une quantité positive, donc x est aussi positif: donc le choquant ira toujours dans la même direction.

170. VII°. *Si le corps choqué est en repos, & si sa masse surpasse celle du choquant, celui-ci reculera après le choc.* Car alors on aura comme ci dessus $x = \frac{MV - mV}{M + m}$, & $z = \frac{2MV}{M + m}$ dont la première formule sera une quantité négative.

171. PROBLEME II. *Déterminer les circonstances des mouvemens de deux corps à ressort parfait M, m qui se choquent en allant en sens opposés avec des vitesses données V, u.*

SOLUTION. La vitesse rélative des deux corps avant le choc est $V + u$ (125), & la quantité de leur mouvement rélatif est $MV - mu$ (151) : Supposons qu'après le choc le corps M aille encore dans sa première direction avec une vitesse absolue x, il est clair (160) que le corps m ira dans le même sens avec une vitesse absolue z plus grande que x; donc après le choc la vitesse rélative (125) sera $z - x$, & on aura (161) $z - x = V + u$: donc $z = x + V + u$.

La quantité de mouvement de M sera Mx, & celle de m sera $mx + mV + mu$: On aura donc aussi (151) $Mx + mx + mV + mu = MV - mu$, d'où on tirera les expressions des vitesses absolues des corps M, m après le choc, savoir $x = \frac{MV - mV - 2mu}{M + m}$, & $z = \frac{2MV + Mu - mu}{M + m}$.

Régles pour le choc direct des Corps à ressort parfait qui viennent en sens opposés.

172. I°. Lorsqu'un des deux corps est en repos, le choc se fait de la même manière que dans les Régles III. VI. VII. du Problême précédent.

173. II°. *Si les masses & les vitesses sont égales, après le choc les corps reculent tous deux avec une même vitesse:* car alors $M = m$, & $V = u$: donc $x = -V$, & $z = V$: or $x = -V$ exprime le recul du corps M, car puisque nous avons supposé qu'il gardoit sa direction, & qu'en conséquence nous avons fait x positif, il est clair que cet x étant devenu négatif, le corps M ne garde pas cette direction dans le cas de l'égalité des masses & des vitesses : & puisque les quantités positives marquent le sens de la première direction du corps M, il est évident que le mouvement du corps m, qui est $z = V$, se fait dans cette direction, c'est-à-dire, dans une direction opposée à celle qu'avoit le corps m avant le choc.

174. III°. *Si les vitesses sont égales, un corps arrêtera par le choc le mouvement d'un autre corps triple en masse, mais il reculera avec une vitesse double de celle qu'il avoit avant le choc.* Car ayant $V = u$, donc $x = \frac{M - 3m}{M + m}$, & $z = \frac{3M - m}{M + m}$: Et si $m = 3M$, on aura $x = -2$, & $z = 0$, ou si $M = 3m$, on aura $x = 0$, & $z = 2$.

175. IV°. *Si un corps plus que triple en choque un autre qui ait une égale vitesse, le choquant ne changera pas de direction.*

176. V°. *Si un corps moins que triple en choque un autre qui ait une égale vitesse, le corps choquant reculera.*

177. VI°. *Si deux corps de masses égales se choquent avec des vitesses inégales, ils reculeront tous deux après avoir échangé leur vitesse;* car alors M = *m*, donc $x = - u$, & $z = V$.

178. VII°. *Si un corps en choque un autre dont la masse & la vitesse sont différentes, le choquant perdra tout son mouvement dans le choc, si le produit de sa masse par sa vitesse est égal au produit de la masse du choqué par la somme du double de sa vitesse & de la vitesse du choquant;* si M choque *m*, & si $MV = mV + 2mu$, après le choc $x = o$: car alors $\frac{MV}{M+m} - \frac{mV - 2mu}{M+m} = o$.

179. VIII°. *Si un corps en choque un autre dont la masse & la vitesse sont différentes, le choquant reculera si le produit de sa masse par sa vitesse est plus petit que le produit de la masse du choqué par la somme du double de sa vitesse & de la vitesse du choquant.*

180. IX°. *Si un corps en choque un autre dont la masse & la vitesse sont différentes, le choquant gardera sa première direction, lorsque le produit de sa masse par sa vitesse excedera le produit de la masse du choqué par la somme du double de sa vitesse & de la vitesse du choquant.*

Du Choc oblique.

181. PROBLEME I. *Etant données les directions, les vitesses, les demi-diamétres & la position de deux globes* A & B *sur un plan,* (fig. 13, 14) *déterminer leur point de rencontre, & la situation du plan qui touche les deux globes en ce point.*

SOLUTION. Soit AC la direction du corps A dont la vitesse soit = *a*, soit BC la direction du corps B, sa vitesse = *b*. Prolongez les deux directions, s'il est nécessaire jusqu'à ce qu'elles se rencontrent en C. Faites *a* : *b* : : AC : BK, & vous aurez le point K où le centre du corps B se trouvera dans l'instant que le centre du corps A sera en C (51). Sur BC comme Diagonale, faites avec AC le Parallélogramme ABFC, joignez les points F, K, & du point C comme centre, avec un rayon CG égal à la somme des demi-diamètres donnés,

décrivez un arc qui coupe en G la droite FK, prolongée s'il est nécessaire ; menez GE parallèle à AC, & EH parallèle à GC ; les points E, H seront les lieux des centres des corps donnés, à l'instant de leur contact. Et si du point de contact D, on élève sur HE la perpendiculaire DP, elle déterminera la position du plan, qui touche les deux globes au point D.

DEM. Puisque par construction GE est parallèle à AC ou à BF, les Triangles GKE, KFB sont semblables ; donc KE : KB :: GE ou CH : BF ou AC. Donc (Elem. 304) KB — KE ou BE : KB :: CA — CH ou AH : AC & BE : AH :: BK : AC, donc puisque les espaces BE, AH sont dans le rapport des vitesses, le corps B se trouvera en E, quand le corps A sera en H : & comme la distance de ces points est HE, qui est égale à CG, somme des demi-diamètres des corps donnés, il suit qu'ils se toucheront alors.

182. SCHOLIE. Il est clair 1°. que le Problême seroit impossible, ou que les corps ne se toucheroient pas, si GC, somme des demi-diamètres, étoit plus petite que la perpendiculaire tirée de C sur FK. 2°. Que quand GC est égale à cette perpendiculaire, les deux corps ne se peuvent toucher qu'une fois. 3°. Que lorsque GC est plus grande, le Problême peut avoir deux Solutions, en supposant que les corps se pénétrent comme feroient deux ombres, deux images, (ou comme la Lune avec l'ombre de la Terre dans les Eclipses :) parce qu'on peut mener du point C sur FK deux droites comme CG égales entr'elles, ce qui donneroit les deux points où ils se touchent pour se pénétrer, & ceux où ils se touchent pour se séparer. Mais quand les corps sont solides, ils ne se touchent qu'une fois, comme ils feroient pour se pénétrer ; ensuite ils se quittent par le choc, à moins qu'ils ne soient absolument durs, & que leurs directions ne soient dans la même ligne droite.

183. THEOR. *La force du choc oblique d'un corps quelconque sur un plan immobile, est à la force du choc perpendiculaire sur le même plan, comme le sinus de l'angle de l'inclinaison de la direction du corps sur le plan, est au sinus total.*

DEM. Soit un corps en A, (fig. 12) qui aille frapper

obliquement en B un plan inébranlable CD ſuivant la direction AB, laquelle exprime la force abſolue du corps, ſoit que ſon mouvement ſoit uniforme, ſoit qu'il ſoit uniformément accéléré: Je dis que la force du coup en B eſt à la force que ce coup auroit eu ſi le plan CD eût été perpendiculaire à la direction AB, comme le ſinus de l'angle ABC, eſt au Sinus total.

Car ſi la direction AB eût été perpendiculaire au plan CD, le corps A eût frappé ce plan avec toute ſa force abſolue; mais parce que la direction AB eſt oblique au plan CD, le corps A n'agit deſſus qu'avec une force rélative (86): ſa force abſolue ſe décompoſe en deux, l'une AF parallèle au plan, & qui exprime la partie de la force abſolue qui n'agit pas ſur le plan, l'autre AC perpendiculaire au plan, & qui exprime la partie de la force abſolue qui agit ſur le plan, c'eſt-à-dire, qui exprime la force rélative du corps A par rapport à ce plan. Donc la force du coup oblique eſt à celle du coup perpendiculaire, comme AC à AB, c'eſt-à-dire, (Elem. 747) comme le Sinus de l'angle ABC au Sinus total.

184. COROLL. *Il ſuit de-là que tout effort* E *d'un corps, poids, ou puiſſance* A *qui agit obliquement, eſt comme le produit de ſa maſſe ou force abſolue* M, *par la perpendiculaire* AC, *tirée d'un point quelconque de ſa direction ſur le plan* CD *où ſe fait l'action :* comme nous avons déja vû (87). Parce que l'effort eſt d'autant plus grand que cette maſſe ou force eſt plus grande, & que la perpendiculaire AC eſt plus grande par rapport à la direction AB. Ainſi (15) $E = M \times AC$.

185. PROBLEME II. *Trouver ce qui doit arriver à un corps qui va choquer obliquement un plan immobile.*

I. Cas. Soit le corps A ſans reſſort, qui aille frapper le plan dur & immobile BD ſuivant la direction AB, il eſt clair 1°. que ſa force ſe décompoſe en deux, l'une ſuivant AF parallèle au plan, l'autre ſuivant AC qui lui eſt perpendiculaire. 2°. Qu'il n'y a que la force ſuivant AC qui agiſſe ſur le plan. 3°. Que cette force eſt totalement détruite par le choc (157), d'où il ſuit qu'après le choc il

ne reste plus au corps que la partie de son mouvement absolu, dont la direction est parallèle au plan; donc le corps se meut après le choc parallèlement à la surface du plan qu'il a choqué, c'est-à-dire, le long de BD, avec une force ou une vitesse exprimée par AF, ou par son égale BD.

186. II. Cas. Si le corps A est à ressort parfait, il est certain qu'à cause de l'obliquité de la direction, la force absolue est décomposée dans le choc en deux forces AF, AC, dont l'une représentée par AF subsiste toute entière, sa direction est parallèle au plan où s'est fait le choc, & sa vitesse est exprimée par BD = AF : & qu'à cause du ressort parfait, la force suivant la perpendiculaire AC ne se perd pas, mais qu'elle renaît après le choc, suivant une direction aussi perpendiculaire au plan opposé & égale à la première, c'est-à-dire, suivant BF = CA. Donc après le choc le corps a deux déterminations à la fois, l'une suivant BD, l'autre suivant BF, donc il décrira la Diagonale BE du Parallélogramme fait sur ces directions, lequel sera égal au Rectangle FC, & BE sera égale à BA, le Triangle ABC au Triangle EBD. Donc *un corps à ressort parfait choquant obliquement un plan immobile, ne perd rien de sa force, mais il se réfléchit en faisant l'angle de réflexion* EBD, *égal à l'angle d'incidence* ABC.

187. PROBLEME III. *Déterminer ce qui doit arriver à deux corps sphériques* Q, K *qui se rencontrent suivant les directions obliques* AQ, BK. (fig. 15, 16).

SOLUTION. Ayant déterminé (181) le point de leur rencontre C, & la situation du plan DC où ils se touchent, puis décomposé les forces de ces deux corps en deux forces AG, BF parallèles au plan DC, & en deux A *d*, B *e*, ou GQ, FK perpendiculaires à ce plan, il faut considérer que les forces AG, BF qui ne contribuent en rien au choc, subsistent toutes entières après le choc, & que le choc ne se fait proprement que suivant les directions opposées GC, FC, avec les forces exprimées par GQ, FK. Soit la masse M du corps Q = 7, sa vitesse V suivant GC

exprimée par GQ = 5, soit la masse m du corps K = 3, & sa vitesse u suivant FC, exprimée par FK = 4.

I. Cas. Si les corps sont sans ressort, il faut calculer ce qui arriveroit à ces corps, s'ils se choquoient suivant les directions opposées GC, FC; (fig. 15) & ayant trouvé par la formule $c = \frac{MV - mu}{M + m}$ (152) que $c = 2, 3$, & qu'ainsi les deux corps doivent après le choc se mouvoir tous deux dans le sens de la direction GC, ayant chacun une vitesse = 2, 3, il faut prendre QP & KL = 2, 3; par P mener au plan CM la parallèle PH = AG, tirer QH; par le point L mener à ce plan la parallèle LI = BF, & tirer KI. Je dis qu'après le choc le corps Q ira dans la ligne QH, & qu'il arrivera en H en même-tems que le corps K, qui parcourra KI, arrivera en I.

Dem. Car si on acheve les rectangles Pm, Ln on verra qu'après le choc le corps Q est déterminé à se mouvoir suivant deux directions, l'une QP perpendiculaire au plan, & qui est la partie de la vitesse GQ que le choc lui a laissée, & l'autre PH parallèle au plan que le choc n'a pas détruite. D'où il suit (68) que le corps Q décrira la Diagonale QH de ces deux directions, avec une vitesse exprimée par QH. On verra de même qu'après le choc le corps K a deux déterminations, l'une suivant KL que le choc du corps Q plus fort que lui l'a obligé de prendre, & l'autre suivant LI = BF, que le choc n'a pas changée: Donc le corps K en parcourra la Diagonale, avec une vitesse exprimée par KI.

188. II. Cas. Si les corps sont à ressort parfait, il faut calculer de même ce qui leur doit arriver après le choc dans les directions opposées GC, FC, (fig. 16) & ayant trouvé d'abord par la formule $x = \frac{MV - mV - 2mu}{M + m}$ (171) que la vitesse du corps Q est $-0, 4$, & par conséquent négative, il faut prendre QP = 0, 4, du côté opposé à la direction GC qui a été supposée positive dans la solution du Problême qui a donné cette formule: ensuite mener au plan DM la parallèle PH = AG, puis tirer la droite

QH qui ſera la direction, & exprimera la viteſſe du corps Q après le choc. Ayant après cela trouvé par la formule $z = \frac{2MV + Mu - mu}{M + m}$, que z eſt poſitive, & $= 8, 6$, il faut prendre KL $= 8, 6$ dans le ſens de la direction GC, mener LI parallèle au plan & $=$ BF ; la droite KI ſera la direction, & exprimera la viteſſe du corps K après le choc, ce corps arrivera en I dans l'inſtant que le corps Q arrivera en H. La Démonſtration eſt la même que celle du cas précédent.

189. COROLL. *Dans le choc oblique*, auſſi bien que dans le choc direct, *les corps élaſtiques ſont également éloignés l'un de l'autre, dans les inſtans également éloignés de celui du choc.* On le prouve en faiſant voir que IH $=$ AB (fig. 17). Pour cela je dis que les Trapezes ABFG, PLIH ſont égaux. Car par la conſtruction, les angles homologues GFB, PLI ſont droits, & les côtés adjacens BF, LI ſont égaux ; il en eſt de même des angles FGA, LPH, & des côtés adjacens AG, PH ; reſte donc à faire voir que FG $=$ LP, ou à cauſe de leur partie commune QK, que KF $+$ QG $=$ QP $+$ KL. Ce qui eſt facile, car KF $+$ QG $= u + V$; & QP $= \frac{MV - mV - 2mu}{M + m}$ qu'il faut prendre négativement dans cette figure, à cauſe des ſuppoſitions ſur leſquelles on l'a conſtruite, & KL $= \frac{2MV + Mu - mu}{M + m}$.

Donc QP $+$ KL $= \frac{-MV + mV + 2mu + 2MV + Mu - mu}{M + m}$ qui ſe réduit par la diviſion à $V + u$: Donc en tirant les droites AB, HI on doit former les trapezes égaux ABFG, PLIH.

190. REMARQUE I. Si le reſſort des corps eſt imparfait, il faut déterminer par expérience le rapport de la force de reſtitution à celle de compreſſion, ce qui ſe fait aiſément, en comparant les circonſtances des chocs directs de ces corps, avec celles qui accompagneroient les chocs directs des mêmes corps ſi leur reſſort étoit parfait : & alors dans le calcul de leurs chocs directs ou obliques, au lieu de faire

la force de restitution égale à celle de compression, il faut y substituer le rapport déterminé. Par exemple, si le corps A (fig. 12) a un ressort tel que sa force de restitution ne soit que la moitié de sa force de compression, alors au lieu de prendre BF = CA, il faut prendre BH = $\frac{1}{2}$ CA, & BH représentera la partie du mouvement suivant AC qui s'est conservée après le choc, & ayant mené HG parallèle au plan CD & égale à AF, la Diagonale BG exprimera la direction & la vitesse du corps après le choc.

191. D'où il suit que *dans le choc des corps à ressort imparfait sur des corps immobiles, l'angle de réflexion est d'autant plus petit que l'angle d'incidence, que les corps ont moins de ressort.*

192. REMARQUE II. Nous avons supposé des corps comme des points, ou comme des globes, à cause que ces corps ne se touchent qu'en un point, il est évident que si la figure des corps est différente, il faudra avoir égard à bien d'autres circonstances qu'à celles des directions & des vitesses, comme nous avons fait; mais outre qu'il seroit trop long d'entrer dans le détail de toutes ces figures, ce que nous avons dit des corps sphériques suffit, pour comprendre tous les effets ordinaires du choc, & de l'élasticité des corps.

Application des Régles du choc des Corps à ressort, à la Pratique du Jeu de Billard.

193. Quoiqu'on ne puisse pas, en jouant au Billard, construire géométriquement des Problêmes, & que quand même on les auroit construits, plusieurs circonstances pourroient empêcher le succès de l'exécution, il ne sera peut-être pas inutile de donner ici la solution des principaux de ces Problêmes, tant pour servir d'exemple de la théorie que nous avons donnée, que pour faire comprendre les raisons des différentes directions que le Joueur fait prendre à la bille de son adversaire en la touchant avec la sienne : On suppose ces billes parfaitement élastiques, le Billard parfait dans toutes ses parties, & que l'applatissement de la bille, & l'enfoncement de la bande sont des quantités infiniment petites dans le choc.

194. Toucher une Bille *pleine*, c'est la toucher en sorte que la ligne qui joint les centres dans le choc, soit dans la direction de la bille touchante.

Une bille qui touche pleine une autre bille en repos, doit s'arrêter aussi-tôt. (166)

195. PROBLEME I. *Les deux billes* P, G (fig. 21) *étant données de position & de grosseur, faire ensorte que la bille* G *aille toucher pleine la bille* P *après une simple bricole ou réflexion.*

SOLUT. Ayant déterminé sur quelle bande comme XT on veut faire la bricole, il faut tirer en dedans du billard une ligne RV parallèle à cette bande, & éloignée de la moitié de l'épaisseur de chaque bille: Du centre P de la bille qu'on veut toucher, il faut abbaisser sur RV la perpendiculaire indéfinie PL, prendre FL = FP. Je dis que si on pousse la bille G tout droit vers L, elle ira toucher pleine la bille P après s'être réfléchie en N.

DEM. Car ayant tiré NL, on connoîtra aisément que quand le centre de la bille se trouvera en N, sa surface touchera la bande, & fera réfléchir la bille par son choc; en sorte que le centre retournera vers P en faisant un angle de réflexion égal à l'angle d'incidence. Or les Triangles rectangles PNF, FNL sont égaux, ayant le côté commun FN; & le côté FP = FL par construction. Donc l'angle FNP = FNL. Or (Elem. 428) l'angle FNL = GNV: donc l'angle d'incidence étant GNV, l'angle de réflexion est PNF. Donc la bille G après s'être réfléchie en N, ira frapper la bille P dans la direction NP qui passe par son centre.

SCHOLIE. Comme il est indifférent de quelle bande on se serve, ce Problême a quatre Solutions, à moins que le fer ou quelque blouse ne se trouve dans quelqu'une des directions.

196. PROBLEME II. *Les deux billes* A, B *étant données de position & de grosseur, faire toucher pleine la bille* B *par une double bricole.*

SOLUTION. Ayant choisi les deux bandes XT, XM sur lesquelles on veut faire les bricoles, & tiré les parallèles RV, RO à la distance d'un demi-diamètre des billes, il faut abbaisser du centre de la bille B qu'on veut toucher, une perpendiculaire Bl sur la première bande XT, prendre $fl = f$B, & par le point l ayant tiré sur la ligne RO prolongée en D la perpendiculaire lE, il faut prendre DE = Dl, puis pousser la bille A, comme si on vouloit aller frapper tout droit le point E; elle ira frapper pleine la bille B, après que son centre aura fait deux bricoles, l'une en C, l'autre en n: la démonstration est la même que celle du Problême précédent.

SCHOLIE I. Ce Problême aura souvent quatre Solutions, surtout quand les billes seront éloignées des coins.

197. SCHOLIE II. Si on vouloit trois ou quatre bricoles, il faudroit répéter la même opération; par exemple; si on suppose la bille A en L, il est clair que si après avoir trouvé le point E de la seconde bricole, on tire EI perpendiculaire à la droite ST (parallèle à la bande My, & éloignée d'une demi-épaisseur de bille) prolongée en H, & si on prend HI = HE, en poussant la Bille L droit vers le point I, on aura les trois bricoles en K, en G & en n.

SCHOLIE III. Il feroit très-facile de réfoudre ces Problêmes par l'analyfe à caufe des Triangles femblables qui fe trouvent dans la conftruction, fuivant laquelle toutes les lignes décrites par la bille font parallèles deux à deux.

198. PROBLEME III. *Les deux billes* A, B, (fig. 22) *étant données de pofition, faire aller la bille* A, *vers un point donné* C, ou ce qui eft le meme, *pouffer la bille* A *dans une bloufe donnée* C, *& déterminer la route que fuivra la bille* B *après le choc.*

SOLUTION. Par le centre ou l'axe de la bloufe, ou par le point donné C & par le centre de la bille A, menez la droite indéfinie CO qui coupe en I la furface de la bille oppofée à la bloufe : Prenez IE=AI, & faites paffer par E la droite indéfinie DG perpendiculaire fur CE. Je dis que fi on pouffe la bille B droit au point E, elle pouffera la bille A dans la direction AC, & qu'elle ira après le choc dans la direction EG.

DEM. Car fi par le point I on mene I*y* parallèle à DG, il eft évident que des deux droites font éloignées d'un demi-diamètre de la bille B : que par conféquent cette bille étant arrivée en E touche la bille A en I & la pouffe fuivant la direction EI, qui par la conftruction paffe par le point C. Mais parce que la bille A eft en repos avant le choc, & égale à la bille B, la force rélative avec laquelle la bille B l'a choquée & qui eft exprimée par OE perpendiculaire à DG, & égale à BD, eft éteinte (166) totalement par le choc; Donc il ne refte plus à cette bille B, que la force fuivant BO parallèle à DE ou à I*y* : Donc après le choc, la bille B fuit la direction EG.

199. PROBLEME IV. *Deux billes* H, F, *étant données de pofition & de grandeur, faire en forte que la bille* F *aille après tant de bricoles qu'on voudra pouffer la bille* H *dans une direction* HK *donnée, ou la bloufer où l'on voudra comme en* K, *& déterminer la route de la bille* F *après le choc.*

SOLUTION. Par le point K & par le centre H de la bille tirez la droite indéfinie KM, qui coupe en S la furface oppofée au point K, prenez SP=SH, menez PQ perpendiculaire à KP, & faites (comme dans les deux premiers Problêmes aller la bille F au point P par tant de bricoles que vous voudrez, il eft clair qu'en ce cas elle pouffera la bille H vers K, & on verra comme dans le Problême précédent, qu'après le choc, la bille F ira fuivant la ligne PQ.

200. PROBLEME V. *Faire toucher une bille* H *en un point donné* S *après tant de bricoles qu'on voudra, & déterminer la route des deux billes après le choc.*

Ce Problême revient au précédent. Par le point donné S & par le centre H, faites paffer la droite indéfinie MSK, & SK fera la direction de la bille H après le choc. Prenez SP=SH, & par tant de bricoles que vous voudrez, faites paffer le centre de la bille F par le point P, lorfqu'il y fera, la bille F touchera la bille H au point donné S, puis elle ira dans la direction PQ.

SECONDE SECTION.

De la Rencontre mutuelle & de l'opposition des forces.

201. ON considére la rencontre & l'opposition des forces, comme la cause de tous les mouvemens que nous exécutons, & du repos que nous forçons les corps de garder par le moyen de l'équilibre. C'est pour employer les forces avec tout l'avantage possible, qu'on a imaginé les Machines dont nous allons parler dans cette Section, & dont la théorie connue sous le nom de *Statique*, a fait jusqu'au commencement du dix-septième Siécle, toute la science des Mécaniciens.

Suppositions ou Demandes.

202. I. *On peut regarder un poids quelconque comme un point pesant.* Car l'expérience nous fait voir qu'il y a en dedans ou en dehors de tout corps un point appellé *le centre de gravité* autour duquel toutes les parties de ce corps se contrebalancent également, en sorte que toute la pesanteur semble y résider, & qu'on peut substituer ce point à la place du corps: Nous parlerons dans la suite de la manière de le trouver.

203. II. *Les directions suivant lesquelles les poids suspendus à une même machine tendent à s'approcher du centre de la terre, sont parallèles entr'elles.*

Car quoique ces directions aboutissent toutes au centre de la terre, & que par conséquent elles soient réellement inclinées les unes sur les autres, cependanr une machine est si petite en comparaison de sa distance au centre de la terre, qu'on peut supposer que l'inclinaison de ces directions est infiniment petite ou nulle.

204. III. *L'effort des puissances & des poids est égal dans tous les points de leurs directions.*

C'est-à-dire, que si on pousse, ou si on tire quelque corps avec

avec un bâton (ſuppoſé inflexible & ſans peſanteur) ce corps eſt pouſſé ou tiré avec la même force, ſoit que le bâton ſoit long, ſoit qu'il ſoit court. Et que ſi on ſuſpend un poids à un fil plus ou moins long, il n'en peſera ni plus ni moins (faiſant abſtraction du poids du fil). Car quoique la peſanteur des corps varie ſuivant leurs différentes diſtances au centre de la terre, cette variation eſt totalement inſenſible dans la longueur d'une corde à laquelle un poids eſt ſuſpendu dans une Machine.

De l'Equilibre en général, & en particulier dans les Machines.

205. IL faut ſe rappeller ce qui arrive dans les mouvemens compoſés. Nous avons fait voir (72) que ſi un corps C (fig. 1.) parcourt la Diagonale CB, en vertu de l'action de deux puiſſances P, *p* exprimées par PC, *p*C, qui le pouſſent ſuivant les différentes directions CD, CA, la force F exprimée par FC, eſt capable de lui faire parcourir la même Diagonale en même-tems. D'où il ſuit, que ſi on prend dans cette Diagonale RC = FC, & que ſi on ſuppoſe en R une force égale à la force F, qui pouſſe le corps C dans la direction RC, elle empêchera l'effet de la force FC, ou, ce qui eſt le même, elle empêchera l'effet des deux puiſſances P, *p*, & le corps reſtera immobile en C. C'eſt là ce qu'on appelle reſter en équilibre.

206. PRINCIPE FONDAMENTAL. *Il y a équilibre entre pluſieurs puiſſances, quand il ſe trouve une force* R (que j'appellerai la Réſiſtante) *égale à la force compoſée de deux autres forces* P, *p* (que j'appellerai les forces agiſſantes) *qui pouſſent en même tems un corps* C, *pour le mouvoir dans une direction oppoſée à celle de la force* R.

207. Ou plus généralement. *Il y a équilibre, lorſque pluſieurs forces agiſſantes qui concourent au mouvement d'un même corps* C, *& qu'on peut réduire aux deux* P, *p*, (80) *rencontrent une ou pluſieurs autres forces réſiſtantes, qu'on peut ré-*

duire à une R, *qui se trouve alors égale & directement opposée à l'effet des deux forces* P, *p*.

208. Ou bien encore : *Il y a équilibre quand la somme des forces rélatives de tant de puissances agissantes qu'on voudra, est égale & directement opposée à la puissance absolue d'une seule force résistante, ou à la somme des forces rélatives de tant de puissances résistantes qu'on voudra.*

209. Réciproquement. *S'il y a équilibre entre plusieurs puissances, la somme des forces rélatives des puissances qui agissent d'un côté sera égale à la somme des forces rélatives des puissances qui agissent du côté opposé.* Et pour faire voir qu'il y a équilibre dans une machine, il faut y démontrer l'existence, la direction & l'égalité de ces forces.

210. Coroll. I. Donc en général *dans l'équilibre on peut exprimer les puissances agissantes par les côtés, & la résistante par la Diagonale d'un Parallélogramme.*

211. Coroll. II. *Donc quand trois puissances sont en équilibre, elles sont dans un même plan* (76).

212. Coroll. III. Dans le cas de l'équilibre entre trois puissances, P, *p*, R, on aura toujours les trois proportions suivantes.

P : *p* : : CD ou AB : CA ou DB.
P : R : : CD : CB.
p : R : : CA : CB.

& parce que (Elem. 746) dans les Triangles BCA, BCD, les sinus des angles sont entr'eux comme les côtés opposés, si on désigne le sinus par *s*, on aura . . . .

P : *p* : : *s*CBD ou *s*BCA : *s*BCD *s*ABC.
P : R : : *s*CBD ou *s*BCA : *s*BDC ou *s*BAC ou *s*DCA.
p : R : : *s*CBA ou *s*BCD : *s*BDC ou *s*BAC ou *s*DCA.

213. Theor. I. *Si d'un point quelconque* E (fig. 18, 19, 20) *pris sur une direction des trois puissances* P, *p*, R, *qui sont en équilibre, on tire une perpendiculaire sur chaque autre*

direction, (prolongée s'il est nécessaire,) *les deux autres puissances sont entr'elles réciproquement comme les perpendiculaires*, EK, EH *tirées sur leur direction.*

Car en prenant CE pour Sinus total, ces perpendiculaires sont les Sinus des angles ausquels nous venons de voir que les puissances sont proportionnelles. Ainsi . . . .

P : R :: EH : EK (fig. 20).
P : p :: EK : EH (fig. 18).
p : R :: EH : EK (fig. 19).

214. SCHOLIE. O a donc $P \times EK = R \times EH$ (fig. 20); $P \times EH = p \times EK$ (fig. 18); & $p \times EK = R \times EH$. C'est-à-dire, qu'à cause de la raison inverse, le produit de chaque puissance par la perpendiculaire tirée sur sa direction, est constant. Ce produit, dans le cas de l'équilibre, est donc une expression de l'effort rélatif de chaque puissance, (183). Donc *lorsque deux puissances sont en équilibre avec une troisième, dire qu'elles sont en raison inverse des perpendiculaires tirées du point* E *sur leurs directions, ou des distances du point* E *à leurs directions, & dire que leurs efforts sont égaux relativement au point* E, *sont des expressions équivalentes.*

215. COROLL. *Les directions des trois forces qui doivent former l'équilibre doivent concourir en un point* C; puisqu'elles doivent agir toutes trois ensemble sur ce même point: elles peuvent cependant être parallèles entr'elles: parce qu'alors le point de leur concours est à une distance infinie.

216. THEOR. II. *Lorsque l'effort de deux puissance, qu'on peut* exprimer par deux masses ou poids, *est tellement soutenu par celui d'une puissance résistante, que l'équilibre subsiste entre ces deux masses, jusqu'à ce qu'une impression infiniment petite faite à l'une de ces masses, lui donne un mouvement qui se trouve contrebalancé par le mouvement opposé de l'autre masse, en sorte que l'équilibre se retablisse bientôt: le produit de chaque masse par la vitesse de son mouvement, ou par l'espace que chacune parcourt, ou tend à parcourir dans le même tems, est égal de part & d'autre.*

DEM. Puisqu'il y a un équilibre subsistant ou rétabli, il y a de part & d'autre égalité de forces : or l'expression de la force d'un corps en mouvement est (59) le produit de sa masse par sa vitesse; ou en tems égaux, celui de sa masse par l'espace parcouru : donc dans le cas de ce Théorême, le produit de chaque masse par sa vitesse, ou par l'espace qu'elle parcourt, ou qu'elle tend à parcourir en même tems, est égal de part & d'autre.

217. COROLL. I. *Il y a donc équilibre quand les masses ou puissances absolues sont réciproquement comme les vitesses, ou comme les espaces qu'elles tendent à parcourir en même tems.*

218. COROLL. II. On verra dans la suite (249) qu'on peut en effet exprimer toutes sortes de puissances par des poids suspendus : si donc on veut enlever un poids P, en appliquant à une machine quelconque un autre poids p beaucoup plus petit : soit M la masse du poids P, sa vitesse V; soit m la masse du poids p, sa vitesse u : dans le cas de l'équilibre il faut que $MV = mu$, & par conséquent que $\frac{ME}{T} = \frac{me}{t}$, parce que $u = \frac{e}{t}$ (44). Cette formule nous fera connoître ce qu'on peut espérer de faire à l'aide des machines.

Examen de l'effet qu'on peut attendre des Machines.

219. Les Machines tendent à augmenter tellement la force rélative d'une puissance ou d'un poids p, qu'il puisse contrebalancer celle du poids P, quel qu'il soit : or la puissance qu'on leur applique pour les mettre en mouvement, ne peut être ou qu'un fluide comme l'eau, le vent, &c. ou qu'un poids, ou des hommes, ou des chevaux.

A l'égard des fluides, ce n'est pas ici le lieu d'en parler; il suffira de dire que quand ils agissent sur une surface qu'ils ont mise en mouvement, ils n'y agissent qu'avec une force qui n'est qu'environ $\frac{1}{7}$ de leur force absolue : comme si on estimoit que la force d'une eau courante fût de 100 livres sur un plan immobile; elle ne se trouvera plus que de 15 livres lorsqu'elle aura mis ce plan en mouvement. *Voyez les*

Mémoires de l'académie Royale des Sciences année 1704.

220. On applique très-rarement des poids à une machine qui doit servir à enlever des fardeaux considérables, comme des grosses pierres au haut d'un bâtiment, parce qu'il faut à ces poids de trop grands espaces pour descendre, & qu'il faudroit les remonter trop souvent. Par exemple, pour faire monter à 100 pieds de hauteur un bloc de marbre qui peseroit 10000 livres, en appliquant à une machine quelconque un poids de 400 livres : il est aisé de calculer par la formule $ME = me$, ou $M = 10000$, $E = 100$, & $m = 400$, qu'en faisant abstraction de toutes les imperfections de la Machine, il faudroit que ce poids pût descendre de 2500 pieds, ou qu'on le remontât 25 fois, ce qui seroit très-incommode.

221 A l'égard des hommes & des chevaux, on a déterminé par plusieurs expériences, qu'un homme d'une force ordinaire, qui n'agit que par sa force & non pas par son poids en se suspendant, ne peut faire plus de 25 livres d'effort continuel sur une machine en trois heures de tems, ni parcourir avec ses pieds ou avec ses mains un espace de plus de 12000 pieds par heure; & qu'un bon cheval ne pouvoit faire que le travail de sept hommes ensemble, c'est-à-dire, qu'il ne pouvoit faire un effort continuel de plus de 175 livres en trois heures, ni parcourir en tirant continuellement, plus de 12000 pieds par heure, de sorte qu'on peut estimer que 12000 pieds est le plus grand espace possible qu'une puissance motrice puisse décrire par heure, dans un travail continu.

222. Puis donc que l'effet de toute machine, quelle qu'en soit la construction, se peut réduire à ce qu'une puissance m qui ne peut décrire que l'espace e de 12000 pieds par heure, porte un fardeau M à un espace E, & que de ces quatre choses, il n'y en a que trois d'indéterminées, il est clair que deux de ces trois devenant déterminées, la troisième le devient nécessairement dans la formule $me = ME$, qui se tire de $\frac{me}{t} = \frac{ME}{T}$, parce que dans une

machine en mouvement, les deux puissances opposées sont mues en même tems, de sorte que $t = T$. Or quoique la machine ne puisse être en mouvement, à moins que $\frac{me}{t}$ ne soit un peu plus grand que $\frac{ME}{T}$, nous supposerons néanmoins leur égalité pour plus de facilité dans le calcul.

223. Cela posé, il est évident que si m représente un très-petit poids, & M une masse considérable, la quantité me ne peut exprimer un grand effort, à moins que E ne soit d'autant plus petit par rapport à e, que M est plus grand par rapport à m. Or si e exprime un grand espace, il faut à proportion que le tems de la durée du mouvement de la machine devienne plus long, puisque e ne peut excéder 12000 pieds par heure.

224. Supposons, par exemple, un poids de 1000000 livres qu'on veut élever à 100 pieds de hauteur. On demande 1°. quelle puissance il faut appliquer à une machine quelconque supposée dans un état parfait, (dont cependant toute machine est fort éloignée,) pour y parvenir en une heure de tems. On a donc $M = 1000000$, $E = 100$, $e = 12000$, & dans la formule $me = ME$, on trouvera $m = 8333\frac{1}{3}$ livres. Divisant cette quantité par 25 livres ou par 175 livres, on trouve qu'il faut plus de 333 hommes, ou plus de 47 chevaux, pour soutenir le poids M en équilibre, à l'aide d'une machine quelconque, & à plus forte raison pour l'élever à 100 pieds en une heure de tems.

2°. Si on demande en combien de tems 14 hommes ou 2 chevaux pourroient élever ce poids à 100 pieds, alors $m = 25 \times 14 = 2 \times 175 = 350$ livres: $M = 1000000$, & $E = 100$. Donc $e = \frac{ME}{m} = 285714$ pieds, lesquels à raison de 12000 par heure, répondent à 23, 8 heures, c'est-à-dire, à près d'un jour de travail continuel, & sans aucune interruption.

3° Si on veut savoir à quelle hauteur 14 hommes ou

2 chevaux éleveroient ce poids en une heure; alors $m = 14 \times 25 = 2 \times 175 = 350$, $e = 12000$, & $E = \frac{me}{M} = 4, 2$ pieds, c'est-à-dire, environ 4 pieds 2 pouces $\frac{1}{2}$.

4°. Enfin si on veut savoir quel poids 14 hommes ou 2 chevaux peuvent élever à la hauteur de 100 pieds, en une heure de temps, à l'aide d'une machine quelconque, on trouvera $M = 42000$ livres.

225. Il paroit par-là qu'*en se servant de la machine la plus parfaite, on perd d'un côté ce qu'on gagne de l'autre: On ne supplée à la force qu'aux dépens du tems & de l'espace:* Qu'*enfin l'effet des machines est nécessairement limité par les circonstances dans lesquelles on les met en usage.* Ce qui n'empêche pas cependant que les machines ne soient très-utiles dans une infinité de cas.

Nous verrons dans la suite combien il en faut encore rabattre sur tous ces calculs, où l'on suppose les machines dans un état de perfection, dont elles ne sont pas susceptibles, par la nature des matériaux qu'on est obligé d'employer dans leur construction.

Des Machines en général.

226. On appelle Machine tout instrument propre à faciliter le mouvement des corps.

Nous supposerons d'abord que toutes les parties des Machines sont dans un état parfait, qu'elles sont sans pesanteur, que celles qui doivent être inflexibles le sont parfaitement, quelles sont parfaitement polies, rondes quand il le faut, que les cordes sont parfaitement flexibles, sans épaisseur, &c. Nous examinerons dans la suite ces circonstances.

227. Parmi les Machines il y en a cinq qu'on appelle *Simples*, savoir, *le Levier*, *la Poulie*, *le Tour*, *le Plan incliné*, & celle que M. Varignon a appellée *la Machine Funiculaire.* Elles s'appellent simples, parce qu'elles le sont en effet, & que leurs différentes combinaisons servent à former toutes les autres machines qu'on appelle composées, & dont le nombre est infini.

228. *Dans les Machines on ne compare ensemble ordinairement que deux puissances à la fois.* Si j'ai un poids considérable à soulever, je le comparerai à la puissance appliquée à la machine pour le soulever, ou bien je le comparerai avec l'effort que supporte le crochet, l'appui, ou le point qui soutient toute la machine : ou enfin je comparerai la puissance à l'effort de cet appui.

Des Machines simples.

Du Levier.

229. LE levier est une verge inflexible & sans pesanteur, à deux points de laquelle sont appliquées deux puissances qui font effort dans un même plan, tandis qu'un autre point (appellé *point d'appui, hypomoclion point fixe*) se trouve appuyé sur un point inébranlable, pour résister à l'effort de ces deux puissances.

Cette machine est fort connue & fort en usage pour soulever les fardeaux ; c'est elle qu'on appelle *balance*, *Peson*, *Romaine*, &c. suivant les différentes manieres dont on s'en sert pour peser les corps.

230. Il y a trois manieres de se servir du levier. Dans la première (fig. 23) le point d'appui D est entre les deux extrêmités A & B, dont l'une B sert à porter ou soulever un fardeau P ; on applique une puissance *p* en A suivant une direction quelconque A*p*, pour soutenir ce fardeau en équilibre sur le point d'appui D.

Dans la seconde (fig. 24) le point d'appui est à une des extrémités D, & ayant attaché ou suspendu un fardeau à un point quelconque B, on applique une puissance en A suivant une direction quelconque A*p*, pour soutenir le fardeau en équilibre sur le point D.

Dans la troisiéme (fig. 25.) le point d'appui est encore à une extrémité D, le fardeau à l'autre extrémité B, & la puissance est appliquée entre deux en A suivant une di-

rection quelconque Ap pour soulever le fardeau & le soutenir en équilibre.

231. On appelle *bras de lévier* les parties DB, DA (fig. 23, 24, 25,) comprises depuis le point d'appui, jusqu'à celui où sont appliquées les puissances.

232. Toutes ces manieres reviennent à la même, parce qu'on peut regarder la puissance, le fardeau, & le point d'appui comme trois puissances P, p, R quelconques en équilibre, dont les directions passent par les points A, B, D.

233. THEOREME I. *Dans le levier la puissance est au poids en raison reciproque des perpendiculaires tirées du point d'appui* D, (*ou même d'un point quelconque* E *pris dans la direction de son effort*) *sur leurs directions.*

Cette proposition est évidente par ce que nous avons déjà dit (213), car il est clair (215) que puisqu'on suppose l'équilibre dans le levier, il faut que les directions des trois puissances concourent en un même point C.

234. SCHOLIE I. La position du point C est ordinairement déterminée par celle de la puissance, & par celle du poids; car alors l'effort du point d'appui se dirige vers le concours de ces deux directions. S'il se trouve qu'un poids est suspendu à un levier, son effort est dans une ligne verticale ou perpendiculaire à l'horison; & si la puissance fait aussi effort dans une ligne verticale, les trois directions sont parallèles entr'elles. Elles peuvent encore être parallèles par d'autres raisons, mais de quelque maniere que cela arrive, le Théorême subsiste toujours; seulement on peut dans le cas du parallélisme des directions, substituer au rapport des perpendiculaires, celui des bras de levier, parce que ces perpendiculaires tirées du point d'appui, sont alors ou confondues avec les bras, si les directions sont en même tems perpendiculaires au levier, ou proportionnelles à ces bras, si les directions sont obliques au levier: car à cause des triangles semblables DAK, DBH, (fig 26) on aura DH : DK : : DB : DA. Or par le Théorême, la puissance est au poids, comme DH à DK; donc elles sont aussi comme les bras de levier DB, DA : c'est-à-

dire, réciproquement comme les bras aufquels on les a appliquées.

235. SCHOLIE II. Cette propriété du levier eft encore indépendante de fa figure; parce que dans la démonftration, il ne s'agit que des perpendiculaires tirées du point d'appui fur les directions des deux puiffances appliquées au levier.

236. SCHOLIE III. Il eft évident (213) que fi on veut connoître la charge que fupporte le point d'appui, on trouvera qu'elle eft à une des deux puiffances quelconques, en raifon réciproque des perpendiculaires tirées d'un point pris à difcrétion dans la direction de la puiffance qu'on ne compare pas, fur les deux autres directions: car on peut regarder le point d'appui comme une des trois puiffances néceffaires à former l'équilibre.

237. SCHOLIE IV. *on voit aifément que la balance eft un levier dont le point d'appui ou celui de fufpenfion eft précifement au milieu, afin que fes bras étant égaux, les poids égaux appliqués à leurs extrémités, & dont les directions font toujours perpendiculaires à l'horifon, tiennent auffi le levier parallèle à l'horifon.* Car puifque tous les corps tendent à s'approcher du centre de la terre avec des efforts proportionnels à leurs maffes ou poids (105), fi deux poids font égaux, leurs efforts font égaux: & s'ils font fufpendus aux extrêmités d'un levier dont le point d'appui eft au milieu, ils tirent ces extrémités vers le centre de la terre avec des efforts égaux; par conféquent une de ces extrêmités n'en doit pas approcher plutôt que l'autre: fi donc le point d'appui eft immobile, les deux extrêmités doivent être immobiles, & également éloignées du centre de la terre, c'eft-à-dire, dans une ligne parallèle à l'horifon.

238. SCHOLIE V. Il en eft de même pour le pefon ou la romaine. C'eft un levier dont le point d'appui ou de fufpenfion eft proche d'une de fes extrémités, à laquelle on a fufpendu un poids conftant, qui peut faire équilibre avec toutes fortes de poids, pourvu qu'on les écarte du point d'appui vers l'autre extrêmité, enforte que la diftance du poids conftant au point d'appui, foit à celle du poids in-

connu au même point d'appui, comme ce poids inconnu est au poids constant ; Donc en mesurant la distance d'un poids quelconque au point de suspension du peson en équilibre, on trouve facilement la pesanteur de ce poids.

239. On se sert aussi dans le Nord de l'Europe d'une espèce de peson, qui n'est autre chose qu'un levier chargé d'un poids fixé à une de ses extrêmités, & d'un bassin suspendu à l'autre extrêmité : Ce levier est soutenu en équilibre par un anneau mobile, & qu'on écarte plus ou moins de l'extrêmité chargée du poids fixe, que le corps placé dans le bassin est plus ou moins pesant.

240. PROBLEME. *Deux poids ou puissances données étant appliquées à deux points donnés dans un levier, trouver la troisième puissance capable de faire équilibre, & le point du levier où il faut l'appliquer.*

Ce Problême peut avoir quatre cas. Car ou les directions de ces puissances sont parallèles entr'elles, ou elles sont obliques : & dans ces deux cas, ou les puissances données sont toutes deux agissantes, ou l'une est agissante & l'autre résistante.

I. Cas. Soient données deux puissances agissantes P, p, (fig. 27) aux extrêmités A, B, d'un levier, & dont les directions AP, Bp, sont parallèles : pour trouver le point d'appui D, auquel une puissance demandée R étant appliquée suivant la direction RD, retienne en équilibre les puissances P, p, il est clair 1°. que cette puissance R doit être égale à $P+p$. Car puisque le levier est sans pesanteur, la puissance R doit soutenir elle seule les deux poids P, p. Si donc on suppose que le point d'appui soit en D, on aura (234) $P : p :: BD$ ou $AB - AD : AD$. Donc $p \times AB - p \times AD = P \times AD$, & en transposant $p \times AB = P \times AD + p \times AD$, & divisant, $\frac{p \times AB}{P+p} = AD$; formule qui donne la position du point D. On eût trouvé par un semblable calcul $BD = \frac{P \times AB}{P+p}$.

241. II. Cas. Soient données les puissances P, R, l'une

appliquée en A à l'extrêmité d'un levier indéfini AB, qu'elle tire suivant la direction AP, l'autre en R, qui repousse le levier dans la direction RD, parallèle à AP, on demande le point de ce levier, où il faut appliquer une puissance p, qui fasse équilibre; supposons que B soit le vrai point cherché, on aura donc R : P :: AB ou AD + DB : DB. Donc $R \times DB = P \times AD + P \times DB$, donc en transposant & divisant $\frac{P \times AD}{R - P} = DB$: on eût trouvé par un semblable raisonnement $AB = \frac{R \times AD}{R - P}$, & si on veut savoir la valeur de p, on aura P : p :: DB ou $\frac{P \times AD}{R - P}$: AD. D'où on tirera $p = R - P$.

242. III. Cas. Soient données les puissances P, p (fig. 23) agissantes suivant les directions obliques Ap, BP, qui concourent au point C; prenez sur l'une des deux comme CP, une ligne à volonté CI, & faites P : p :: CI : CL. Par le point L menez LN parallèle à CP, & par le point I menez IN parallèle à Cp : par C & par leur point de concours N menez CN, qui (étant prolongée s'il le faut) rencontrera le levier au point D qu'on cherche : auquel il faut appliquer une puissance R, qui résiste dans la direction RD, & qui soit à la puissance P, comme CN à CI.

243. IV. Cas. Si une des deux puissances P (fig. 24) est agissante, & l'autre R résistante, ayant pris de même CI à discrétion, faites P : R :: CI : CN, joignez les points N, I, & par le point C, menez CL parallèle à NI, ce sera la direction de la puissance cherchée, qui doit être à P, comme NI à CI.

De la Poulie.

244. La poulie est une roue KLH (fig. 28 & 29) de bois ou de métal mobile en D sur un axe, *essieu* ou *goujon*, qui est un cylindre fixé dans la *chape* BD, qui embrasse la poulie. Elle a dans l'épaisseur de sa circonférence une *rainure* ou *gorge* pour recevoir une corde pKHP, qui en-

toure une partie de cette circonférence.

On l'appelle *poulie fixe* quand la chape est attachée à un point inébranlable ; & elle s'appelle *poulie mobile* quand la chape est attachée au fardeau qu'on veut enlever.

Quelquefois on fixe l'axe à la poulie, mais les deux bouts de cet axe (qu'on appelle alors *les tourillons*) peuvent tourner librement dans des trous ronds pratiqués dans la chape.

245. THEOREME. *Dans la poulie les deux puissances en équilibre* P, *p*, *qui tirent la corde qui passe dans sa rainure, sont égales entr'elles.*

Car alors la direction CD de la puissance résistante étant celle du poids suspendu à la poulie, ou de l'effort fait sur le crochet C qui retient la poulie, les deux autres puissances P, *p*, sont entr'elles réciproquement comme les rayons DK, DH, perpendiculaires à leurs directions, c'est à-dire, sont égales entr'elles.

246. COROLL. I. *La tension de la partie p* K *de la corde est égale à celle de la partie* HP.

247. COROLL. II. *Si la poulie est fixe,* (*fig.* 28.) *une puissance en p doit faire un effort égal à la pesanteur du poids* P, *pour le tenir en équilibre.*

248. COROLL. III. La vitesse avec laquelle la puissance tireroit le poids, seroit égale à celle avec laquelle le poids monteroit.

249. COROLL. IV. *Une poulie fixe ne contribue d'elle-même en rien pour augmenter la puissance ; elle sert cependant à en changer comme on veut les directions. C'est ainsi que par son moyen on peut substituer des poids à leur place*, ce qui est très-commode. Car, par exemple, un homme qui dans un travail continuel ne peut employer qu'environ 25 livres de forces, pour enlever un fardeau suspendu en l'air, y peut employer tout le poids de son corps, en changeant par le moyen d'une poulie la direction en haut en bas, en une autre de bas en haut. La poulie contribue encore à diminuer les frottemens des cordes.

250. COROLL. V. *Si la poulie est mobile,* (fig. 29.) la

corde doit être fixe à une de ses extrêmités comme en P. Et alors il est clair que *la puissance p qui attire le fardeau avec la poulie, n'en soutient qu'une partie ; & que cette puissance est au poids, comme* HG *à* HF. Mais les triangles rectangles KDG, HKF sont semblables, à cause des lignes DK, HF, qui étant perpendiculaires à KC, sont par conséquent parallèles, d'où il suit que l'angle DKG = KHF, (Elem. 433) : d'ailleurs HG = KG (Elem. 448) : Donc KG ou HG : HF :: KD : HK. Donc on peut dire aussi que *dans la poulie mobile, la puissance est au poids, comme le demi-diamètre de la poulie, est à la soutendante de l'arc embrassé par la corde.*

251. COROLL. VI. *Si les directions des cordons p*K, HP *sont parallèles, la puissance est au poids comme* 1 *à* 2 ; car alors KH est confondue avec un diamètre.

252. COROLL. VII. *La vitesse avec laquelle la puissance attire le poids, est à celle avec laquelle le poids avance, comme* KH *à* KD ; *ou si les Directions sont parallèles, comme* 2 *à* 1.

253. SCHOLIE. La démonstration précédente suppose que les deux cordons HP, K*p* font un angle égal PCD, *p*CD de part & d'autre de la droite DR, ce qui est le cas le plus ordinaire, mais comme il est possible que ces cordons soient autrement disposés, on peut faire une proposition plus générale, en considérant l'effet d'une puissance appliquée à un des cordons quelconque comme K*p*, de quelque façon que l'autre cordon HP soit dirigé. Je dis donc que *si en tirant le cordon* K*p qui enveloppe la poulie mobile, on fait décrire au centre* D *de cette poulie une droite quelconque* DR, *oblique à la direction* K*p du cordon que l'on tire, l'effort absolu employé à tirer le cordon, est à l'effort rélatif qui fait avancer le centre de la poulie, comme le sinus total est au cosinus de l'obliquité de la route du centre par rapport à la direction suivant laquelle le cordon* K*p est tendu.* Car si par le centre D on tire DS parallèle, & DK perpendiculaire à K*p* ; & si par un point quelconque S pris sur DS on tire S*p* perpendiculaire à K*p*, & SR perpendiculaire à DR, il est évident que si DS ou son égale K*p* exprime l'effort

absolu de la puissance appliquée au cordon pK, cet effort peut être décomposé en deux, l'un exprimé par SR qui ne contribue en rien au mouvement du centre de D vers R, & l'autre exprimé par DR qui produit seul le mouvement du centre de D vers R; donc DR exprime l'effort rélatif de la puissance appliquée en p. Or (Elem. 747) dans le triangle rectangle DSR, on a DS est à DR, comme le sinus total, est au cosinus de l'angle SDR. Et cette analogie convient aux droites HD & HG à cause du triangle rectangle HDG, égal au triangle KDG, & semblable au triangle DSR: puisque (183) si HD, KD représentent les efforts absolus des puissances p, P, leurs efforts rélatifs seront représentés par HG & KG.

Du Tour.

254. On entend ici par *Tour*, un cylindre ou *Tambour* mobile sur son axe, ou sur deux tourillons ou pivots ronds & polis, fixés à ses deux extrêmités, & engagés dans deux trous, *fentes* ou *crapaudines* qui le supportent, & qui le tiennent arrêté. On attache à ce cylindre une corde, qui est elle-même attachée à un fardeau, afin de l'attirer vers la Machine, à mesure que la corde s'entortille autour du tambour, qu'on fait tourner par le moyen d'une manivelle, d'une roue, ou de plusieurs leviers engagés dans des trous faits à travers du cylindre. C'est ainsi que sont construites les machines qui servent à tirer les pierres des carrières aux environs de Paris, à tirer de l'eau des puits, &c. Quand le tombour est posé parallèlement à l'horison, le tour s'appelle *Treuil*, & quand il lui est perpendiculaire, il s'appelle *Cabestan.*

255. THEOREME. *Dans le Tour, la puissance appliquée à la roue ou à la manivelle est au poids qu'on attire & qui reste en équilibre, comme le rayon du tambour, au rayon de la roue, ou de la manivelle, ou à la longueur du levier prise depuis l'axe du cylindre.*

DEM. DF (fig. 30) représente un des montants immobiles: D est la fente où est engagé le pivot, DH le rayon

du tambour ou cylindre, & DK celui de la roue ou manivelle : HP est la corde qui se roule sur le tambour pour attirer le poids P, *p* K est la direction d'une puissance appliquée en K, pour faire tourner la roue KES, ou pour faire tourner le cylindre par le moyen du levier DK. Or il est clair que si on prolonge l'axe du montant DF, la direction de la corde HP, & celle de la puissance *p*, elles iront concourir en cas d'équilibre au point C, & (213) que le poids P sera à la puissance *p*, comme DK à DH.

256. COROLL. I. Les circonférences étant entr'elles comme les rayons (Elem. 582) *dans le tour armé d'une roue, la puissance est au poids comme le contour du tambour, est au contour de la roue.*

257. COROLL. II. Dans le tour armé d'une roue, on peut supposer la puissance appliquée à une corde qui embrasse la roue, & cette corde tirée dans le plan de cette roue & dans une direction quelconque, laquelle est toujours une Tangente à la roue, au point où la corde commence à la quitter. *On peut donc supposer la puissance appliquée à un point quelconque de la roue sans rien changer à l'effet, pourvu que la direction de cette puissance soit une tangente à la roue en ce point, & qu'elle tende à faire tourner la roue dans le même sens.*

258. COROLL. III. Le chemin parcouru par le poids étant égal à la quantité dont la corde s'entortille sur le tambour, *la puissance a une vitesse qui est à celle du poids, comme le rayon ou le contour de la roue, au rayon ou contour du tambour.*

259. REM. Il est bon d'observer ici que la démonstration de cette analogie suppose que la direction HP du poids & la direction K*p* de la puissance sont dans un même plan avec la direction DF de la résistance des appuis, parce qu'on a fait voir (76) que cela doit être, pour que l'équilibre subsiste dans les forces réduites à trois. Or dans cette machine il y a toujours deux appuis, inégalement chargés selon la position de la corde par rapport à un des bouts du tambour, & les deux directions des résistances de ces appuis, sont nécessairement dans un plan différent

différent de celui qui passeroit par la direction PH du poids, & par le point de la roue où la puissance agissante est appliquée. Mais il est aisé de faire voir que l'analogie précédente entre la puissance & le poids subsiste néanmoins; ce n'est que l'analogie entre la puissance & la charge ou résistance des appuis, qu'on ne peut démontrer par le rapport des perpendiculaires tirées de H sur les directions CD, C*p*. Car soit AGL (fig. 31) le tambour placé horisontalement, IK son axe, D le centre de la roue, DH son rayon; il est clair que si on imagine que le poids Q soit appliqué au point A de la surface du tambour, & la puissance en un point H de la circonférence de la roue; de sorte que la droite AH coupe l'axe du tambour en quelque point comme F, il est clair qu'à cause de l'assemblage & de la solidité des parties du tour, la puissance appliquée en H sur la circonférence du tour exerce son effort par rappott au poids appliqué en A, comme si H & A étoient les bouts d'un levier dont le point d'appui fût en F. Or à cause de l'équilibre, la puissance en H est à son effet en A, comme FA est à FH, & à cause des triangles rectangles semblables ABF, FDH, on a FA : FH : : AB : DH.

260. A l'égard de la charge des appuis, quoiqu'il soit ordinairement moins important de la calculer, on peut trouver celle que cause l'action des deux puissances P, *p*, en faisant abstraction du poids du tambour & de la roue. Car après en avoir trouvé la quantité absolue par le moyen d'une droite HA (fig. 30) tirée du point H perpendiculairement à C*p*, comme si les deux appuis étoient réunis au point D, dans le plan de la roue du tour, on peut considérer cette quantité comme un poids suspendu au point F (fig. 31) d'un levier IK dont les extrêmités sont aux points I, K où s'exercent les résistances des appuis, la quantité absolue de la charge est donc partagée en deux parties qui sont entr'elles en raison réciproque des bras de levier FK, FI.

Du Plan incliné

261. Lorsqu'on retient un corps C (fig. 32) sur un plan incliné AB, les deux forces agissantes qui forment l'équilibre, sont 1°. la pesanteur absolue de ce corps C, dont la direction PC est perpendiculaire à l'horison, & qui tend à pousser le corps en embas. 2°. La puissance p qui retire ce corps suivant une direction quelconque Cp. 3° La résistante CR est une perpendiculaire tirée du centre C du corps sur le plan, parce que c'est suivant cette direction que le plan incliné soutient le corps C.

262. THEOREME. *La puissance* p *qui retient un poids, en équilibre sur un plan incliné, est à ce poids, comme le sinus de l'angle de l'inclinaison du plan; au sinus de complement de l'inclinaison de la direction de la puissance* p *sur le plan incliné.*

DEM. 1°. Si on mene CI parallèle au plan incliné, l'angle DCI sera droit, & l'angle ICp sera l'inclinaison de la direction Cp par rapport à CI, ou par rapport au plan incliné: donc l'angle DCH sera le complement de cette inclinaison. 2°. Les Triangles DCK, AKG sont semblables; donc l'angle KAG de l'inclinaison du plan est égal à l'angle DCK. 3°. Si on prend DC pour Sinus total, DK sera le sinus de l'angle DCK, & DH celui de l'angle DCH. Or il est clair (213) que p : P :: DK : DH. Donc p est à P, comme le sinus de l'inclinaison du plan, est au sinus du complement de l'angle p CI.

263. COROLL. I. *Si* Cp *étoit parallèle au plan incliné, la puissance seroit au poids, comme le sinus de l'angle d'inclinaison au sinus total, ou comme la hauteur* BF *du plan incliné, à sa longueur* AB.

264. COROLL. II. Si Cp étoit parallèle à l'horison, l'angle pCD seroit le complement de l'angle DCK ou de l'inclinaison du plan, & alors on auroit la puissance est au poids, comme le sinus de l'inclinaison du plan, à son sinus de complement; or si on prend AB pour rayon, BF sera le sinus de l'inclinaison, & AF son sinus de complement.

Donc *quand la direction de la puissance* p *est horisontale*, p : P : : *comme la hauteur du plan incliné à la longueur de sa base.*

265. COROLL. III. Si sur IC on fait l'angle NCI = IC*p*, la même puissance appliquée en N, tiendra le Corps en équilibre, comme elle le tenoit en *p*.

266. COROLL. IV. *Donc quand l'inclinaison du plan est constante, plus la direction de la puissance est oblique par rapport au plan incliné, plus il lui faut de force pour faire garder l'équilibre au poids.*

267. COROLL. V. *Plus l'inclinaison du plan diminue, l'angle de la direction de la puissance avec le plan restant le même, moins il faut de force en* p, *pour faire garder l'équilibre au poids* P.

REM. Voyez encore ce qui est dit du plan incliné dans l'article qui traite des propriétés du centre de gravité. n°. 381. & suivants.

Des Poids soutenus par des cordes.

268. Tout ce que nous avons dit de l'équilibre qui se fait suivant les côtés & la Diagonale d'un ou de plusieurs Parallélogrammes, qui expriment les directions & les forces des puissances, se peut appliquer très facilement à des cordes, qui étaat tirées en différents sens, restent immobiles. Par exemple, on peut représenter l'équilibre qui est entre les puissances *p*C, PC, RC, (fig. 1.) en supposant que le point ou nœud commun C, est tiré de C en A par une corde CA avec une force exprimée par *p*C, & en même tems de C en D par une autre corde CD avec une force PC, tandis qu'une troisieme corde CF le tire de C en F avec une force exprimée par CR; ou si on suppose que le point C (fig. 4.) tiré par trois cordes placées dans différents plans, & dont les droites *p*C, QC, PC représentent les directions & les forces qui sont appliquées aux cordes, reste en équilibre, parce qu'il se trouve contretir par une quatrième corde FC, égale & directement opposée à CB, qui exprime (89) la force composée des troi forces *p*C, QC, PC: Ces cordes ainsi disposées, ou plus

généralement, tant de cordes qu'on voudra qui tirent un même point ou plusieurs points en différents sens ou dans des plans différents, & qui restent en équilibre, composent *la Machine funiculaire.*

269. Si l'on suppose un poids B (fig. 33) attaché à une corde CB, laquelle est nouée à une autre corde PC*p*, dont chaque bout est accroché en P, *p*, ce poids sera soutenu par la machine funiculaire, parce que le crochet *p* tirera le bout *p* C de la corde de C en *p* : le crochet P tirera le bout PC de C en P, tandis que le poids B tire le nœud de C en B.

Il est clair que la force que chaque crochet employe pour soutenir sa partie du poids, est égale à la tension du cordon compris depuis ce crochet jusqu'au nœud.

270. THEOREME. *Les tensions de deux des trois cordes qui composent la machine funiculaire sont entr'elles réciproquement comme les perpendiculaires tirées d'un point quelconque de la troisième sur les deux autres.*

271. COROLL. I. *Chaque crochet soutient des parties du poids qui sont en raison réciproque des perpendiculaires* DH, DK.

272. COROLL. II. *Une corde inclinée ou parallèle à l'horison, & qui est retenue par deux points fixes, ne peut jamais être parfaitement en ligne droite, avec quelque force qu'elle soit bandée.* Car la pesanteur de cette corde fait l'effet de plusieurs petits poids suspendus à chaque point de la corde. Or si une corde sans pesanteur est tendue, les deux crochets la tirant également chacun de son côté, la feront rester en ligne droite & en équilibre : mais si on suspend un poids quelconque vers le milieu de cette corde, il rompra l'équilibre ; & fera ployer la corde plus ou moins suivant sa pesanteur, & la tension de la corde.

Il en est de même de presque tous les corps, comme des poutres, des barres de fer, &c. qui sont toujours un peu courbées vers le milieu, lorsqu'elles sont posées sur les deux bouts parallèlement à l'horison.

273. REMARQUE. La courbe suivant laquelle se ploient les corps flexibles attachés à deux points qui ne sont pas

dans une même ligne à plomb, s'appelle *la chaînette:* on en peut voir la construction & les propriétés dans les Journaux de Leipsic année 1691. p. 274. dans l'analyse démontrée du P. Reynau, tome 2. page 389. & dans les Transactions Philosophiques, N. 231.

Des Machines composées.

274. QUAND plusieurs machines simples sont réunies pour produire un certain effet, leur assemblage s'appelle *une Machine composée.*

L'effet E d'une machine simple est d'augmenter la puissance p qui lui est appliquée : Si cet effet E est appliqué à une autre machine simple pour lui servir de puissance, la puissance p est encore d'autant plus augmentée, que l'effet de chaque machine simple en particulier est plus grand.

Soit un levier AB (fig. 34) dont l'appui est en D, soit en A une puissance p, qui faisant effort contre le poids P, ne le puisse mettre en équilibre avec ce seul levier AB, mais qui le puisse à l'aide d'un autre levier EA, dont l'appui est en C, parce que la puissance p appliquée en E, & agissant suivant pF, fait un plus grand effort pour abaisser le bras de levier AD, qu'elle ne le faisoit lorsqu'elle étoit appliquée immédiatement en A. Or l'effort qu'elle fait en A étant (233) à la puissance p, comme EC à CA, il sera $= \frac{EC \times p}{CA}$. Et puisque cet effort agit sur le levier AB, en sorte que le poids P est en équilibre, on aura $\frac{EC \times p}{CA} : P :: DB : DA$. Donc $\frac{DA \times EC \times p}{CA} = P \times DB$, & en ôtant la fraction, $DA \times EC \times p = P \times DB \times CA$, & réduisant en proportion, $p : P :: DB \times CA : DA \times EC$. Et c'est l'analogie d'une machine composée de deux leviers.

275. D'où il suit que *dans une machine composée, la puissance est à l'effet, en raison composée des rapports de chaque Machine simple, dont l'assemblage forme la machine composée.*

276. REMARQUE. La méthode de composer ces rap-

ports eſt plus abrégée dans le calcul des machines dont nous allons parler ; mais elle eſt fondée ſur la précédente. On déſigne par des lettres l'effet de chaque machine, & on multiplie par ordre les termes de leurs analogies : on diviſe enſuite par ces lettres la première raiſon de l'analogie compoſée qui en réſulte, & cette première raiſon devient ſimple. Par exemple, ayant appellé E l'effet du premier levier, on aura p : E :: CA : EC. Enſuite E : P :: DB : DA ; donc en multipliant par ordre $p \times$ E : P $\times$ E :: CA $\times$ DB : EC $\times$ DA ; & diviſant la première raiſon par E, ce qui ne change pas le rapport (Elem. 296) on aura p : P :: CA $\times$ DB : EC $\times$ DA.

Nous n'entrerons pas dans un grand détail des machines compoſées, nous en expliquerons ſeulement les plus ordinaires, ſçavoir le coin, les rouages, les vis, & les poulies mouflées.

Du Coin.

277. Le coin eſt compté ordinairement parmi les machines ſimples : on va voir cependant qu'il ne fait ſon effet, que comme une machine compoſée de deux plans inclinés, & de deux leviers.

C'eſt une eſpèce de priſme triangulaire ABD (fig. 37) qu'on ſuppoſe iſoſcele, c'eſt-à-dire, tel que ſes faces AD, BD ſoient égales ; il ſert à ſoulever les fardeaux, & ſurtout à fendre du bois en introduiſant ſon taillant dans une fente déja commencée.

278. Lorſqu'on applique une puiſſance P ſur la tête AB du coin, les deux côtés de la fente ſe ſéparent, & preſſent chacune des faces AD, BD du coin à cauſe de la réſiſtance du bois ; or quoiqu'ils touchent ces faces en un grand nombre de points, on peut cependant ſuppoſer que leurs efforts ſont réunis aux ſeuls points I, K, & qu'ils agiſſent dans les directions IC, KC perpendiculaires à ces faces. Car les fibres du bois ſont fort élaſtiques, & en même-tems adhérentes les unes aux autres, enſorte qu'elles s'allongent à meſure qu'on les tire, & qu'elles ne ſe ſépa-

rent que quand la force avec laquelle on les tire, surpasse celle de leur ressort. Par l'effort du coin les fibres qui sont dans la ligne MH sont d'autant plus allongées, qu'elles sont plus près de l'extrêmité M de ce qui reste à fendre ; & par leur ressort, elles font d'autant plus de résistance à leur séparation, qu'elles sont plus allongées. Cependant si le morceau de bois est long, cet allongement ne s'étend dans la ligne MH que jusqu'à un certain point, comme Q au-delà duquel l'effort du coin ne se fait plus sentir : Or quoique la longueur de MQ qui exprime le nombre des fibres allongées soit inconnue, aussi-bien que la quantité absolue de la résistance composée de la somme des résistances de chaque fibre, parce que tout cela dépend de la nature particulière du bois ; cependant pour connoitre à peu près le rapport de l'action de la puissance P à son effet, on peut supposer qu'il n'y a qu'une seule fibre vers N, entre M & Q, dont la résistance équivaut à la somme de toutes les autres ; ou, ce qui revient au même, on peut supposer que le bois étant réellement fendu depuis M jusqu'en Q, il y a un lien en N dont la force est égale à la somme de toutes les tensions des fibres depuis M jusqu'en Q, & alors il est évident que pour rompre ce lien, il faut que les faces du coin agissent sur les points I,K, comme sur des bouts de levier INQ, KNQ dont le point d'appui est en Q, & dont les bras sont NQ, IQ, & NQ, KQ ; ce qui se fait par la décomposition de la puissance P qui agit dans la direction PC, en deux efforts égaux CI, CK perpendiculaires aux côtés AM, BM de la fente. Cela posé....

279. THEOR. VI. *Si une puissance* P *appliquée sur la tête* AB, *d'un coin isoscele, est en équilibre avec les parties d'un morceau de bois dans lequel il est engagé ; cette puissance* P *est à la résistance* R *du bois, comme* $AB \times QN$ *à* $2AD \times IQ$.

Pour démontrer cette proposition, nous considérerons qu'à cause de l'égalité des parties de la figure de part & d'autre de la ligne PH, nous pouvons déterminer seulement l'effort de la moitié PAD du coin sur la partie IH, puis ayant doublé tous les termes, nous aurons tout l'effort du

coin entier, sur toute la piéce de bois.

Il est évident que si du point D on tire DE, DF parallèles à CK, CI, les côtés égaux CE, CF représenteront les efforts de la résistance du bois, & DC celui de la puissance P. Donc $\frac{1}{2}$ DC exprimera $\frac{1}{2}$ P ou l'effort fait sur la partie IH, & CE la résistance de cette partie. Or 1°. les triangles CED, ADB sont semblables, car ils sont isosceles à cause de l'égalité des faces du coin, & de celle des forces CE, CF ou ED, & que les triangles rectangles APD, DIC étant semblables par la construction, l'angle ECD = BAD. On aura donc, CD : CE :: AB : AD. Et en prenant la moitié du premier & du troisième terme, $\frac{1}{2}$ P : CE :: AP : AD. Mais à cause du levier, CE : $\frac{1}{2}$ R :: QN : IQ. Donc en composant, (276) $\frac{1}{2}$ P : $\frac{1}{2}$ R :: AP × QN : AD × IQ ; & en doublant tous les termes P : R :: 2AP × QN ou AB × QN : 2AD × IQ.

280. REMARQUE I. Lorsqu'on fait sauter un éclat avec un coin, ou qu'on souleve un fardeau, ce n'est pas que ce coin ne fasse un effort égal des deux côtés de ses faces, & qu'il n'y sente une résistance égale; mais c'est qu'à cause de la foiblesse de la partie enlevée, la réaction de celle qui reste immobile, se joint à l'action du coin sur celle-là, & contribue à produire cet effet.

281. REMARQUE II. C'est à l'effet du coin qu'on doit rapporter la force des clous, des aiguilles, des épée, s&c. pour percer ; celle des ciseaux, couteaux, coignées, sabres, rasoirs, &c. pour couper.

Remarques sur la force de la percussion.

282. Nous avons supposé jusqu'ici que les puissances appliquées aux machines pouvoient s'exprimer par des poids (249) : mais cette supposition ne peut avoir lieu, lorsqu'on employe la force de percussion, soit en faisant tomber un corps sur un bout de levier, soit en supposant qu'il soit frappé par un corps mû uniformément. La force de percussion produite par la rencontre d'un corps pesant n'est pas comparable à celle de la pression que ce corps

peut faire par son poids seulement ; car la force étant égale au produit de la masse par la vitesse (59) celle d'un corps pesant en repos, ne peut être que le produit de sa masse *m*, par une vitesse infiniment petite $\frac{u}{\infty}$. Elle peut donc s'exprimer par $\frac{mu}{\infty}$, au lieu qu'un corps qui tombe, ou qui se meut uniformément a une vitesse infinie, & sa force est $= mu$.

Il ne faut donc pas s'étonner de ce qu'en frappant légérement la tête d'un clou à demi-enfoncé dans du bois, on le fait entrer plus facilement, que si on posoit doucement sur cette tête un poids de 1000 livres.

283. A l'égard de la comparaison des forces de percussion produites l'une par un mouvement uniforme, l'autre par un mouvement uniformément accéléré ; il est évident (96) qu'en supposant les masses égales, ces forces sont égales aussi, si l'espace parcouru par le mouvement uniforme depuis le commencement du mouvement uniformément accéléré, est double de celui qui a été parcouru par ce mouvement accéléré.

Des Rouages.

284. On appelle *Rouage* une machine ou une partie de machine composée, où se trouve un assemblage de plusieurs roues divisées & entaillées en parties égales, dont celles qui sont saillantes s'appellent *Dents*. Chaque roue est fixée à un axe ou tour mobile sur des pivots ; cet axe est lui-même ou divisé en dents égales, & s'appelle *Pignon* de la roue, ou bien il est composé de petits cylindres, ou *Fuseaux* parallèles, & disposés à égales distances autour de l'axe des pivots, & alors on l'appelle *Lanterne*. La première piéce d'un rouage n'est pas ordinairement une roue dentée, c'est un tour simple, ou une manivelle, dont le pignon ou la lanterne engrene dans les dents d'une grande roue, qui porte elle-même un pignon ou une lanterne engrenée dans les dents d'une autre roue, & ainsi de suite jusqu'à la dernière roue, qui n'a pas de pignon, mais

ſeulement un tambour, ſur lequel s'entortille une corde, qui attire un fardeau. Voilà en gros l'idée de cette machine.

285. THEOR. *La puiſſance* p *appliquée à la manivelle d'un rouage, eſt au poids* P *attiré par la corde, comme le produit des rayons de chaque pignon ou lanterne & du tambour, eſt au produit des rayons de chaque roue & de la manivelle.*

DEM. Chaque roue avec ſon pignon n'eſt autre choſe qu'un treuil. Suppoſons un rouage compoſé d'une manivelle dont le rayon ſoit D, & de deux roues dont les rayons ſoient d, δ, que le rayon du pignon de la manivelle ſoit R, celui du pignon de la première roue r, celui du pignon de la ſeconde ρ. Soit E l'effet de la manivelle & de ſon pignon, e l'effet de la première roue & de ſon pignon, P qui eſt le poids attiré ſera l'effet de la ſeconde roue & de ſon tambour : & on aura (255) ces trois analogies $p : E :: R : D$..... $E : e :: r : d$..... $e : P :: \rho : \delta$. Donc en compoſant (276) $p : P :: R r \rho : D d \delta$.

286. COROLL. I. *Plus il y aura de roues, plus l'effet ſera grand, toutes choſes d'ailleurs égales.*

287. COROLL. II. *Plus les pignons ſeront petits en comparaiſon des roues, plus la machine aura de force :* le calcul en eſt facile. Si après avoir pris toutes les largeurs des roues & des pignons, on trouve $D = 10$, $d = 12$, $\delta = 15$ & $R = 2$, $r = 3$, $\rho = 3$, & ſi $p = 50$ livres, on aura $P = \frac{p D d \delta}{R r \rho} = 5000$ livres. Mais ſi on eût trouvé $D = 15$, $d = 18$, $\delta = 20$; & $R = 1$, $r = 1\frac{1}{2}$, $\rho = 2$, p étant toujours de 50 livres; on auroit eu $P = 90000$ livres.

288. THEOR. *Dans un rouage en mouvement, le nombre des tours de manivelle eſt à celui des tours de la première roue, & en général le nombre des tours d'une roue quelconque A, eſt au nombre des tours de la roue* B *à qui elle donne le mouvement; comme le nombre des dents de la roue* B, *au nombre des dents du pignon ou des fuſeaux de la lanterne de la roue* A.

DEM. Tandis que la roue A fait un tour, ſon pignon n'en fait qu'un, mais il ne fait faire à la roue B qu'une partie de révolution, qui eſt égale au nombre des dents de

ce pignon, divisé par le nombre des dents de la roue B. Donc le nombre des tours de la roue A, est au nombre des tours de la roue B, réciproquement comme le nombre des dents du pignon de la roue A, est au nombre des dents de la roue B, ou directement comme le nombre des dents de la roue B, au nombre des dents du pignon de la roue A.

289. COROLL. I. Puisque le nombre des dents de chaque roue compose sa circonférence, & que ces dents sont égales : on peut substituer au rapport précédent celui des circonférences, ou même celui des rayons.

290. COROLL. II. *Le nombre des tours de manivelle est à celui des tours du tambour, comme le produit du nombre des dents, ou de la circonférence, où des rayons de chaque roue, est au produit du nombre des dents, ou des contours, ou des rayons de chaque pignon.* Car si on appelle C, la circonférence décrite par la manivelle ; c, κ les contours ou le nombre des dents des deux roues ; L, l, les contours ou le nombre des dents des deux pignons, λ le contour du tambour : N, n, ν le nombre des révolutions de la manivelle & de chaque roue, & par conséquent celui de leurs pignons, on aura toujours (288) N : n : : c : L, & n : ν : : κ : l. Donc, N : ν : : $c\kappa$: Ll.

291. REM. Ceci nous conduit à quelques pratiques de calcul, utiles dans les arts où l'on emploie les rouages, comme dans l'horlogerie.

I. Dans un rouage en mouvement, un pignon peut mener une roue, ou une roue peut mener un pignon, selon que la force motrice est communiquée à la roue par le pignon, ou au pignon par la roue. Dans ces deux cas, *le nombre de tours de la piéce menée est exprimé par une fraction dont le numérateur est le nombre de dents de la piéce qui mene, multiplié par le nombre de ses révolutions, & le dénominateur est le nombre de dents de la piece menée.* Ainsi un pignon de 6 dents menant une roue de 52 dents, lui fait faire 3 tours, tandis qu'il en fait 26, parce que $\frac{6 \times 26}{52} = 3$.

292. II. Si donc on a un rouage composé de plusieurs roues & pignons, par exemple, si une roue de 48 dents mene un pignon de 8, à l'axe duquel soit fixée une roue de 40 dents, qui mene un pignon de 6, lequel porte sur son axe une roue de 36 dents, engrenée dans un pignon de 6, auquel soit fixé un tambour, ou une roue de rencontre; on peut exprimer le nombre de tours que fait le tambour, pendant que la première roue en fait un, par $\frac{48}{8} \times \frac{40}{6} \times \frac{36}{6} = 240$.

293. III. D'où il suit, qu'on peut faire faire le même nombre de tours à une roue de rencontre ou à un tambour, en employant des roues & des pignons, dont les nombres de dents soient tous différents de ceux d'un autre rouage, pourvu que les fractions qui servent à exprimer ces roues avec leurs pignons, fassent un même produit: Ainsi $\frac{64}{10} \times \frac{50}{8} \times \frac{36}{6} = 240$ exprime un rouage, qui fait le même effet que le précédent.

294. IV. De ce que $\frac{48}{8} \times \frac{40}{6} \times \frac{36}{6} = \frac{48 \times 40 \times 36}{8 \times 6 \times 6}$, & qu'en quelque ordre qu'on mette les termes du numérateur, & ceux du dénominateur, on aura (Elem. 45) toujours la même valeur, il suit qu'absolument parlant on peut donner à une des roues prises à volonté dans le numérateur, celui des pignons qu'on voudra prendre dans le dénominateur; & que toutes les roues & pignons étant ainsi employés, le rouage produira le même effet. Mais cela n'est pas entièrement arbitraire dans la pratique, par la proportion qu'il faut donner à ces piéces, suivant la matière qu'on emploie à les faire, & selon le volume qu'on veut donner à la machine; ce que l'expérience apprend aux artistes.

295. V. Etant donné le nombre des roues & pignons par lesquels on veut faire faire à un tambour, ou à une roue de rencontre, un certain nombre de tours donnés, tandis que la roue à laquelle la puissance motrice est appliquée n'en fait qu'un, pour trouver le nombre des dents de ces roues & de leurs pignons, on peut suivre cette régle, qui est fort

aisée dans la pratique ; soit proposé, par exemple, de faire faire 3600 tours au tambour, par le moyen de 4 roues & de 4 pignons. *Prenez tous les nombres premiers qui sont les diviseurs du nombre des tours donnés :* Ainsi 2, 2, 2, 2, 3, 3, 5, 5 sont ceux de 3600. *Distribuez ces diviseurs en tel ordre que vous voudrez, pour en faire autant de parts que vous avez de roues à employer.* Ainsi je fais les quatre parts 2, 2; 2, 3; 2, 5; 3, 5. *Du produit de chacun des nombres qui font chaque part, faites autant de numérateurs de fractions à chacune desquelles vous mettrez* 1 *pour dénominateur.* J'ai donc $\frac{4}{1}$, $\frac{6}{1}$, $\frac{10}{1}$, $\frac{15}{1}$. *Multipliez chacun des deux termes de chaque fraction par tel nombre entier que vous voudrez, mais qui exprime le nombre des dents que vous voulez donner à vos pignons.* Ainsi je fais $\frac{4}{1} \times 7 = \frac{28}{7}$, $\frac{6}{1} \times 8 = \frac{48}{8}$, $\frac{10}{1} \times 6 = \frac{60}{6}$, $\frac{15}{1} \times 5 = \frac{75}{5}$. *Enfin faites une fraction composée du produit de toutes ces fractions, & choisissez dans les numérateurs chacune des roues à laquelle vous donnerez pour pignon un des dénominateurs.* J'ai donc $\frac{28 \times 48 \times 60 \times 75}{7 \times 8 \times 6 \times 5}$ que je peux distribuer ainsi, $\frac{75}{8}$, $\frac{60}{7}$, $\frac{48}{6}$, $\frac{28}{5}$. J'eusse pu prendre pour mes quatre parts, $2 \times 2 \times 5$; 2×3 ; 2×3 ; 5 : j'eusse eu $\frac{20}{1}$, $\frac{6}{1}$, $\frac{6}{1}$, $\frac{5}{1}$, ce qui m'auroit donné un autre rouage équivalent, &c.

296. VI. De là il est aisé de voir comment on peut calculer le nombre des dents qu'a du avoir une roue ou un pignon perdu, dans un rouage dont l'effet est connu.

297. VII. On peut de même trouver le changement qu'il faut faire à une simple roue, ou bien à une roue & à son pignon, pour changer à volonté le nombre des tours d'un tambour, en conservant toutes les autres piéces du rouage. Comme si on vouloit changer le rouage $\frac{28}{5}$, $\frac{48}{6}$, $\frac{60}{7}$, $\frac{75}{8}$ en un autre qui donnât 4000 tours de tambour, en gardant toutes les piéces, excepté la roue de 48 & le pignon 6. On fera $\frac{28}{5} \times \frac{x}{y} \times \frac{60}{7} \times \frac{75}{8} = 4000$, donc $\frac{x}{y} = \frac{4000}{450} = \frac{80}{9}$, d'où l'on voit qu'il faut substituer dans le rouage, une roue de 80 dents menant un pignon de 9, à la place de la roue de 48 menant un pignon de 6.

298. THEOREME. *Dans un rouage en équilibre, la puissance est au poids attiré, en raison réciproque des espaces qu'ils tendent à parcourir.*

Quoique cette proposition soit une suite évidente de l'équilibre (217), voici comme on la peut démontrer. L'espace que la puissance ou l'extrêmité de la manivelle tendent à parcourir, est égal au produit de sa circonférence C par le nombre de ses tours N. Or (290) le nombre de ses tours étant comme $c\kappa$, son espace sera $Cc\kappa$: Par la même raison l'espace parcouru par le poids, est comme le produit de la circonférence λ de son tambour, par le nombre de ses révolutions, c'est-à-dire, comme $Ll\lambda$. Or (Elem. 582) $Cc\kappa : Ll\lambda :: Rr\rho : Dd\delta$. Et (285) $p : P :: Rr\rho : Dd\delta$, donc $p : P :: Cc\kappa : Ll\lambda$.

De la Vis & de son Ecrou.

299. Tout le monde connoit la vis & son écrou : pour en pouvoir calculer l'effet, il faut concevoir tant de triangles égaux qu'on voudra DhH, hIi, iKk, (fig. 35) &c. rectangles en h, i, k, dont les bases Hh, Ii, Kk sont égales au contour du cylindre AM. Si on replie ces triangles sur le cylindre, il est clair que les points H, I, K tomberont sur les points h, i, k, en sorte que les hypoténuses formeront autour du cylindre une certaine courbe spirale uniforme $Dahbick$, qu'on appelle la vis. Les distances égales Dh, hi, ik s'appellent *les pas de la vis.* Il est clair aussi qu'il faut que cette courbe soit en rélief. L'écrou est une vis formée de la même manière dans la concavité d'un cylindre creux, sa courbe doit être égale à celle de la vis, & ses pas aussi égaux, afin qu'elle puisse en être l'écrou.

300. Il y a trois manières de se servir de la vis & de son écrou : la première est de fixer l'écrou, & de faire tourner la vis dans l'écrou : la seconde est de fixer la vis, & de faire tourner l'écrou : la troisième est de fixer la vis, en sorte cependant qu'elle puisse tourner sur son axe, & que l'é-

crou en approche en glissant contre un plan sans tourner. On fait tourner la vis ou son écrou par le moyen d'un tour, qui forme la tête de la vis où le plan de l'écrou, ou par des leviers qu'on applique à l'un ou à l'autre.

L'usage de la vis est d'attirer un fardeau attaché à la partie mobile, ou de presser un corps contre un plan en y appuyant le bout de la vis mobile, ou autrement.

301. Pour concevoir l'action de la vis, il faut considérer que si on ne lui suppose aucune pesanteur, & que la vis & son écrou soient libres & dans un état parfait, l'écrou doit tourner autour de sa vis, ou la vis dans son écrou, comme un plan glisse en montant sur un plan incliné, avec d'autant plus de facilité, que les pas de la vis seront plus serrés. Mais si l'écrou, par exemple, est chargé d'un poids, tous les points de sa spire pressent tous les points de celle de la vis, de même que tous les points d'un plan chargé pressent tous ceux du plan incliné sur lesquels il glisse. On peut donc représenter l'effort de chaque point de l'écrou sur le point correspondant de la vis, par celui d'un poids P (fig. 36), posé sur un plan incliné IKL, qui est un des triangles dont la vis est formée. Cela posé . . . .

302. THEOR. *La puissance appliquée au levier qui est perpendiculaire à l'axe de la vis ou de son écrou, est à la force avec laquelle la vis ou son écrou font leur effet, comme un pas de la vis, est à la circonférence decrite par le bout du levier.*

DEM. Si DR représente le levier destiné à faire tourner la vis, il est clair que l'axe de cette vis restant immobile, le point d'appui de ce levier est en D, que les bras sont DN, DR; & que la puissance R doit faire équilibre avec une force F capable de soutenir l'effort de l'écrou contre la vis, ou de la vis contre l'écrou. On a donc (234) R : F :: DN : DR. Or (Elem. 582) DN est à DR, comme LK contour de la vis, est à H contour du cercle décrit par l'extrêmité R du levier; Donc R : F :: LK : H. Mais l'effort que fait chacun des points de l'écrou sur chacun des points correspondants de la vis, étant représenté par celui d'autant de poids P, retenus chacun en équilibre sur le plan

incliné IK, par une force *p* appliquée à chacun dans une direction parallèle à LK, on a pour chacun de ces poids (264) *p* : P : : IL : LK. Donc (Elem. 310) la somme de toutes les forces *p* nécessaires pour retenir en équilibre tous les poids P, est à la somme de tous ces poids : c'est-à-dire, la force F capable de soutenir tout l'effort E de l'écrou contre la vis, est à cet effort E, comme IL à LK ; ou F : E : : IL : LK. Donc en composant (276) R : E : : LK × IL : H × LK : : IL : H. (Elem. 296). C'est-à-dire, la puissance appliquée au levier est à son effet sur la vis, comme un pas de la vis, est à la circonférence du tour, ou du cercle décrit par le bout du levier.

303. Coroll. I. La vitesse du poids dont un écrou glissant est chargé, ou qu'une vis presse, est exprimée par un pas de la vis ; & celle de la puissance, par la circonférence du levier : *La puissance est donc au poids, en raison réciproque de leurs vitesses.*

304. Coroll. II. *Plus les pas de la vis seront serrés & le levier long, plus la vis aura d'effet.*

De la Vis sans fin.

305. Quelquefois on applique la vis à une roue pour lui servir de pignon, elle s'appelle alors *Vis sans fin* : & l'on conçoit aisément qu'elle fait autant de tours que la roue a de dents, parce qu'elle engrene ses pas successivement dans chaque dent.

306. Theoreme. *Quand une roue* A *tourne par le moyen d'une vis sans fin, la puissance appliquée au levier, à la manivelle ou à la roue dont cette vis est le pignon, est à son effet ; par exemple, au poids qu'attireroit une corde entortillée sur le tambour de la roue* A ; *comme le produit d'un pas de la vis par le rayon du tambour, au produit de la circonférence décrite par le levier multipliée par le rayon de la roue* A.

Dem. Cette proposition est évidente par ce qui a été dit ci-dessus (255 & 302) Car la puissance appliquée à la manivelle, est à l'effet de la vis sur la roue A, comme un

un pas de la vis, à la circonférence décrite par la manivelle : & l'effet de la vis sur la roue A, est au poids attiré par son tambour, comme le rayon du tambour, au rayon de la roue A ; & par conséquent en multipliant ces deux proportions, on aura l'analogie proposée.

307. COROLL. I. Par un même raisonnement on verra que si on applique une puissance *p* à une manivelle M, qui fasse tourner par le moyen d'une vis sans fin *m* une roue A, dont le pignon *a* fasse tourner une autre vis sans fin O, laquelle vis fasse en même-tems tourner une roue B, dont le pignon *b* fasse tourner une autre vis sans fin Q, laquelle vis fasse encore tourner une troisième roue C, qui porte le tambour sur lequel s'entortille la corde, qui attire un fardeau P : on verra, dis-je, que *p* est à P, comme le produit fait d'un pas de la vis *m* multiplié 1°. par le rayon du tambour, 2°. par les rayons des pignons *a*, *b*, 3°. par les rayons des vis sans fin O, Q, qui agissent sur les roues B & C : au produit fait de la circonférence décrite par la manivelle multipliée, 1°. par les rayons des roues A, B, C, 2°. par les rayons des vis O, Q, qui agissent sur les pignons des roues A & B. Car la proposition précédente donne déja 1°. l'analogie composée.... La puissance *p* est à l'effet du pignon A, comme le pas de la vis *m* multiplié par le rayon du pignon *a*, est à la circonférence de la manivelle multipliée par le rayon de la roue A. L'effet du pignon *a* est de faire tourner la vis O, qui fait tourner elle même la roue B de même qu'un trueil, & par conséquent (255) 2°. l'effet du pignon *a* sur la vis O, est à l'effet de la vis O sur la roue B, comme le rayon de cette vis à l'endroit où elle est engrenée dans la roue B, au rayon de cette même vis à l'endroit où elle est engrenée dans le pignon *a*. 3°. L'effort de la vis O sur la roue B, est à celui avec lequel cette roue fait tourner son pignon *b*, comme le rayon de ce pignon au rayon de la roue. 4°. L'effet du pignon *b* sur la vis Q, est à l'effet de cette même vis sur la roue C, comme le rayon de cette vis à l'endroit où elle est engrenée dans la roue C, au rayon de la même vis à l'endroit où elle

eſt engrenée dans le pignon *b*. 5°. Enfin l'effet de la roue C ſur ſon tambour, eſt à l'effet P de ce tambour, comme ſon rayon, eſt au rayon de la roue C. Donc par une analogie compoſée, on aura le rapport de la puiſſance *p* au poids P tel qu'on vient de le donner.

308. COROLL. II. Il ſuit de-là que la viteſſe de la dernière roue C doit être très-petite, puiſque chaque roue ne fait qu'un tour, tandis que la vis qui la fait tourner en fait autant que la roue a de dents.

309. EXEMPLE DU CALCUL DE CETTE MACHINE. Soit le rayon de la manivelle de 168 lignes, ſa circonférence ſera (Elem. 616) de 1056 lignes. Soit le rayon de la roue A de 96, de la roue B de 90, de la roue C de 85. Celui du pignon *a* de 20, du pignon *b* de 18, du tambour de 16 lignes. Soit la moitié de l'épaiſſeur de la vis O ou ſon rayon à l'endroit où elle touche le pignon *a*, de 14 lignes: à l'endroit où elle touche la roue B de 9 lignes: le rayon de la vis Q à l'endroit où elle touche le pignon *b* de 8 lignes, & à l'endroit où elle touche la roue C de 6 lignes; ſoit enfin le pas de la vis *m* de 1 ligne; par l'analogie on aura $p : P :: 1 \times 20 \times 9 \times 18 \times 6 \times 16 : 1056 \times 14 \times 90 \times 8 \times 85$, ou $p : P :: 311040 : 86858956800$: donc ſi *p* eſt 1 livre, P ſera de $279253\frac{1}{3}$ livres, c'eſt-à-dire, une livre en ſoutiendra plus de 279253 en équilibre.

Des Moufles.

310. Les moufles ſont des aſſemblages de pluſieurs poulies dans deux chapes. Elles tournent quelquefois toutes ſur un même axe ou *goujon* dans chaque chape, quelquefois elles ſont placées les unes au deſſous des autres avec un goujon pour chacune: on fixe une des chapes (qu'on appelle alors *Moufle fixe*) à un point immobile, & l'autre (appellée *Moufle mobile*) au fardeau P qu'on veut attirer vers la moufle fixe. On attache pour cet effet le bout d'une corde, ou à la chape de la moufle mobile, ou à celle de la moufle fixe, ou à quelque autre point immobile: & l'ayant fait paſſer ſucceſſivement ſur chaque poulie

de chaque moufle, on applique une puissance p à l'autre bout de la corde pour la tirer.

311. THEOREME. *Le fardeau* P *étant en équilibre avec la puissance* p, *la corde est par-tout également tendue.*

DEM. La partie p H (fig. 38) de la corde où est appliquée la puissance p, a une tension égale à celle de la partie K a (246), par la même raison la tension de la partie Ka est égale à celle de $a\,h$, &c.

312. COROLL. *Il suit de-là que la tension de chaque partie de la corde est égale à la puissance* p, *ou que chaque partie de la corde fait sur chaque poulie un effort égal à* p.

313. THEOREME. *En supposant que les deux cordons qui embrassent chacune des poulies de la moufle mobile font des angles égaux de part & d'autre avec la droite que le centre de la poulie décrit dans le mouvement de la moufle.* 1°. *Si le bout* R (*fig.* 39) *du cordon est attaché à la poulie fixe, ou à tel point fixe qu'on voudra, la puissance* p *est au poids* P, *comme* 1 *à la somme des quotients de chaque soutendante de l'arc embrassé par la corde dans la moufle mobile, divisée par son rayon.*

DEM. Le poids P est égal à la somme des charges que portent chaque poulie mobile, car celles qui sont fixes ne servent qu'à changer la direction de la corde, pour la faire passer par-dessous plusieurs poulies mobiles (249): or le bout de la corde R étant attaché à un point fixe, la charge de la première poulie $k\,h$ se connoit (250) par cette proportion $kd : kh :: p : \frac{p \times kh}{kd}$. Celle de la seconde KH par celle-ci, $KD : KH :: p : \frac{KH \times p}{KD}$, & par conséquent $P = \frac{p \times kh}{kd} + \frac{p \times KH}{KD}$. Donc en divisant par p, on a $\frac{P}{p} = \frac{kh}{kd} + \frac{KH}{KD}$, & réduisant cette équation en proportion, $p : P :: 1 : \frac{kh}{kd} + \frac{KH}{KD}$.

314. COROLL. *Si les cordes étoient paralleles entr'elles, la puissance seroit au poids, comme* 1 *au double du nombre des poulies mobiles.* Car alors les cordes embrasseroient la moi-

tié de chaque poulie, & on auroit $kh = 2kd$, & $KH = 2KD$, donc $\frac{P}{p} = \frac{2kd}{kd} + \frac{2KD}{KD}$, ou $\frac{P}{p} = 4$, & en proportion $p : P :: 1 : 4$.

315. II°. *Mais si le bout de la corde* R (fig. 38) *est attaché à la chape mobile, la puissance est au poids, comme* 1 *à la somme du quotient de la moitié de la soutendante de la dernière poulie fixe, divisée par son rayon, & des quotients de chaque soutendante entière des poulies mobiles, divisée par son rayon.*

DEM. Si la corde est attaché en R, le bout bR soutient lui seul un effort du poids, qui est la moitié de la charge de la poulie B. Or (313) cette charge est $= \frac{p \times bc}{Bb}$; Donc l'effort que le bout de la corde bR soutient est $= \frac{p \times \frac{1}{2} bc}{Bb} = \frac{p \times bf}{Bb}$; & les poulies mobiles soutenant les mêmes efforts que dans le Théorême précédent, on aura $P = \frac{p \times bf}{Bb} + \frac{p \times kh}{kd} + \frac{p \times KH}{KD}$, d'où on tirera l'analogie $p : P :: 1 : \frac{bf}{Bb} + \frac{kh}{kd} + \frac{KH}{KD}$.

316. COROLL. *Quand les cordes sont parallèles entr'elles, la puissance est au poids, comme l'unité est à* 1, *plus le double du nombre des poulies mobiles :* car alors $\frac{bf}{Bb} = 1$, $\frac{kh}{kd} = 2$, & $\frac{KH}{KD} = 2$; donc $p : P :: 1 : 1 + 2 + 2 :: 1 : 5$.

317. SCHOLIE. Si les deux cordons de quelque poulie de la moufle mobile ne font pas des angles égaux de part & d'autre avec la droite que le centre de la poulie décrit dans son mouvement, alors il faudra substituer aux Analogies précédentes, celle qui suit : la puissance appliquée à l'extrêmité du cordon; est au poids entraîné par la moufle mobile, comme le rayon ou sinus total, est à la somme des cosinus de l'obliquité de chacun des cordons qui embrassent les poulies mobiles, à l'égard de la droite selon laquelle la moufle mobile produit son effet, ou ce qui est le même à l'égard de la droite que le centre de chaque poulie mobile décrit dans son mouvement.

Des principales Causes qui font obstacle à l'effet des Machines, & de la manière d'y avoir égard dans le calcul.

318. IL s'en faut de beaucoup que la pratique & la construction des machines répondent à la théorie. Nous avons supposé dans les calculs précédens que tout étoit dans un état de perfection : on va voir combien il en faut rabattre. Si l'état des choses pouvoit être conforme aux suppositions géométriques, une Fourmi pourroit conduire dans un terrein uni & de niveau une charrette chargée de plus de 5000 livres, que cinq chevaux ont bien de la peine de tirer sur un chemin pavé ; car suivant la construction géométrique, les roues sont des cercles parfaits, parfaitement mobiles & en équilibre sur leur axe ou essieu ; elles ne touchent la terre qu'en un point, & la surface de la terre est parfaitement polie, parfaitement dure : d'où on conclud fort bien que la moindre force finie suffit pour faire aller sans cesse la charrette dans une direction parallèle au plan des roues, quelle que soit sa charge, pourvu que la direction de son centre de gravité concoure avec celle de l'essieu : mais cette conclusion est bien éloignée de la vérité.

C'est à ces obstacles qu'il faut faire grande attention avant que de prononcer sur l'utilité ou sur la possibilité de l'exécution d'une machine, car c'est ce qui les fait ordinairement si mal réussir. Nous ne pouvons nous étendre beaucoup là-dessus, c'est une matière qui demanderoit un Traité entier, d'autant plus qu'elle n'a pas encore été assez approfondie. * Nous nous contenterons d'indiquer les principaux inconvénients qu'on rencontre dans la construction actuelle des machines simples.

* M. Belidor, dans l'introduction à son Architecture hydraulique, a donné des régles & des principes sur cette matière, qui peuvent suffire dans la pratique, en attendant que cette partie de la Mécanique ait été perfectionnée.

319. DANS LE LEVIER. Comme il n'y a pas de corps parfaitement dur, la flexibilité du levier lui donne une courbure vers son point d'appui, lorsqu'on s'en sert, cette courbure fait que les vrais bras de levier ne sont pas les vraies parties du levier depuis le point d'appui jusqu'à ceux où sont appliquées les puissances : le défaut de dureté fait aussi que le point d'appui ne peut être un vrai point Physique, ni un point inflexible : d'ailleurs l'expérience a appris que les flexibilités de deux leviers semblables ne sont pas proportionnelles à leurs dimensions.

320. II°. Le poids du levier est encore cause que les bras que nous lui avons assignés ne sont pas ses véritables bras. Soit le levier AB (fig. 27) d'une matière homogene, & d'une figure uniforme, long de 24 pouces, pesant 15 onces. Soit la puissance P de 10 livres ou de 160 onces, en équilibre avec la puissance p de 20 livres ou de 320 onces. Puisqu'en supposant le levier sans pesanteur $BD = \frac{P \times AB}{P + p} = 8$ pouces (240) : AD sera donc de 16 pouces : mais parce que le levier pese 15 onces, AD pesera 10 onces & BD 5 onces. Par conséquent la charge que AD fera porter à l'appui sera de $160 + 10$ onces, & celle de BD sera de $320 + 5$ onces, ou $P = 160 + 10$, & $p = 320 + 5$. Or cela posé les bras ne sont plus réciproquement comme ces nombres ; donc le vrai point d'appui du levier pesant n'est pas en D.

Pour le trouver, il faut regarder la pesanteur du levier comme un poids F suspendu au milieu du levier ; & chercher par la méthode qu'on donnera dans la suite (349) le point de suspension commun aux poids P, p, F : on trouvera dans cet exemple AD de 15 pouces $\frac{29}{33}$, & BD de 8 pouces $\frac{4}{33}$.

321. III°. L'épaisseur du levier fait qu'on ne peut appliquer les puissances à leurs vrais points, qui sont dans l'axe qui passe au milieu de cette épaisseur.

322. DANS LA POULIE. Il y a trois inconvénients considérables, savoir le poids des cordes, leur roideur, &

le frottement des parois du trou sur son goujon, & des faces de la poulie sur la chape.

La roideur des cordes est d'autant plus nuisible, 1°. qu'elles sont plus grosses : 2°. qu'elles sont plus neuves : 3°. qu'elles portent un plus grands poids, parce qu'elles ont d'autant plus de peine à se plier : 4°. que la machine va plus vîte, parce qu'il faut qu'elles se plient plus vîte : 5°. que les poulies sont plus petites, parce qu'alors il faut que les cordes se plient davantage ; d'où il suit que dans la pratique il faut préférer les vieilles cordes aux neuves, & les grandes poulies aux petites, toutes choses d'ailleurs égales.

323. DANS LE TOUR. La roideur & le poids de la corde causent tous les mêmes inconvénients dans le tour que dans la poulie, mais son épaisseur en cause d'ailleurs un autre très-considérable : car la corde entortillée sur le tambour en augmente le rayon de la moitié de son épaisseur, parce que l'action de la corde se fait suivant son axe : de sorte que ce seul inconvénient exige qu'on change l'analogie du tour en celle-ci. *La puissance est au poids, comme le rayon du tambour plus la moitié de l'épaisseur de la corde*, ou si la corde s'entortille dessus plusieurs fois, *comme la distance de l'axe du tambour à l'axe de la corde extérieure, est au rayon de la roue.* Il y a encore un frottement considérable des pivots sur leurs crapaudines.

324. DANS LE PLAN INCLINÉ, la plus grande difficulté consiste dans le frottement des surfaces.

325. A L'ÉGARD DES FROTTEMENTS il n'y a pas de machines où il ne s'en trouve : c'est le plus grand obstacle à leur mouvement ; la connoissance que nous en avons n'est guère fondée que sur l'expérience ; elle n'est pas encore suffisamment éclaircie.

Il n'y a pas de surface si polie qui ne soit toute hérissée de petites pointes, dont les intervalles sont de petites cavités: on les voit facilement au Microscope. Quand une surface glisse sur une autre, ses petites pointes entrent dans les cavités de l'autre & réciproquement : elles ne peuvent donc se mouvoir que les petites pointes ne sortent de leurs petites

cavités pour retomber dans d'autres, & ainsi de suite.

326. I°. On a trouvé par expérience que *la quantité du frottement de deux plans l'un sur l'autre ne dépend pas tant de la grandeur des surfaces qui se touchent, que de la pesanteur du plan glissant.* Car si on conçoit la pression de la surface glissante causée par son poids, comme distribuée également dans toutes ses parties : soient deux plans A & B pesant chacun 144 livres, & dont l'un A ait sa surface de 12 pieds quarrés, & l'autre B de 3 pieds quarrés : que tous deux glissent séparément sur la surface C : donc la pression de A sur C sera de 12 livres par pied quarré, & la pression de B sera de 48 livres par pied : or il faut une force égale pour élever à une certaine hauteur en un tems donné un poids de trois fois 48 livres, que pour y élever un poids de 12 fois 12 livres. Donc il faut une égale force pour vaincre le frottement de la surface B, que pour vaincre celui de la surface A. Donc la quantité de frottement est en raison du poids, & non pas de l'étendue des surfaces.

327. Rem. Cette proposition n'est pas absolument vraie dans tous les cas, mais seulement dans ceux qui sont les plus ordinaires.

328. II°. On a trouvé par expérience, que *lorsque les surfaces ne sont pas fort dures, ni susceptibles d'un grand poli, comme sont les bois & les pierres ordinaires, la quantité du frottement est ordinairement le tiers de la pression.* Voici comme l'expérience se peut faire. On pose un corps pesant dont la surface est plane & polie autant que sa nature le permet, sur un plan de niveau poli de même, & l'on incline insensiblement ce plan, jusqu'à ce que le corps commence à glisser. Dans les matériaux ordinaires, qui ne sont pas fort durs, ni capables d'un grand poli, le corps ne commence à glisser que quand le plan est incliné de 18 à 19 degrés : (auquel cas la hauteur du plan n'est que le tiers de sa longueur). Or quand le corps est sur le point de glisser, son frottement qui l'a retenu jusques alors sur le plan, est sur le point d'être surpassé par la partie de la pesanteur qui oblige le corps de glisser. On peut donc

représenter ce frottement par une puissance CH ou KD (fig. 32) qui retient le corps en équilibre sur le plan, tandis que le poids CD de ce corps le contraint de glisser. Mais (263) CH : CD :: FB : AB. Donc *la quantité du frottement est à celle de la pression, comme la hauteur du plan incliné est à sa longueur.*

329. REM. Comme les différens corps sont plus ou moins durs, & capables de recevoir un poli plus ou moins parfait, pour avoir égard aux frottemens que doit vaincre une machine qu'on se propose de construire, il faut déterminer, par des expériences semblables à celle qu'on vient d'indique, le rapport des frottemens aux pressions, selon la nature des différents matériaux qu'on doit employer, & selon le degré de poli qu'on doit leur donner.

330. III°. On a trouvé par expérience que *les surfaces des corps hétérogenes, sont, toutes choses d'ailleurs égales, sujettes à un moindre frottement réciproque, que celles des corps homogénes.* Ainsi le cuivre & l'acier s'usent moins par le frottement que le cuivre qui glisse sur le cuivre, ou l'acier sur l'acier : le chêne s'use moins sur l'orme, que le chêne sur le chêne, l'orme sur l'orme.

331. Les frottemens sont d'une très-grande utilité dans la plûpart des parties des machines, ils apportent de très-grands inconvéniens dans d'autres parties : Plusieurs piéces ne se soutiennent, n'agissent sur les autres que par le frottement, tandis qu'un frottement nuit au jeu des autres piéces.

332. On augmente le frottement en augmentant l'étendue, & les aspérités des surfaces frottantes. On diminue le frottemeut en durcissant les surfaces, en les polissant, en les enduisant d'une matière onctueuse, en les diminuant d'étendue, ce qu'on exécute dans les piéces qui doivent tourner sur un axe, à l'aide des pivots ou tourillons les plus petits & les plus exactement tournés qu'il est possible, & en substituant des plans inclinés polis & durcis aux trous dans lesquels ces pivots devoient tourner. On met entre les surfaces qui doivent couler ou glisser l'une sur

l'autre, des rouleaux ou cylindres polis. Enfin on diminue le frottement par d'autres moyens que les circonſtances ſuggérent à ceux qui ont de l'expérience dans l'exécution des machines. Mais on ne peut faire un calcul exact de la quantité dont le frottement augmente ou diminue l'effet des machines, tant à cauſe de la nature des matériaux qu'on eſt obligé d'y employer, dont la plûpart des qualités & propriétés ſont variables & même inconnues, qu'à cauſe du grand nombre de circonſtances Phyſiques qui ſe rencontrent dans l'exécution & le jeu d'une machine, & deſquelles on ne peut guère faire qu'une eſtimation vague, fondée ſur des expériences qui ne ſont pas ſuſceptibles de juſteſſe, ſi ce n'eſt dans quelques cas fort rares.

Des momens & des centres de gravité, & de la manière de les déterminer.

333. NOus avons ſuppoſé juſques ici que les puiſſances, les poids, & les corps mêmes pouvoient s'appliquer aux machines comme de ſimples points peſants, en réduiſant ces corps à leur centre de gravité : il faut maintenant montrer comment on peut trouver ce point dans chaque corps, & quelles ſont ſes principales propriétés.

334. Il eſt évident parce que nous avons dit du levier, que la puiſſance p (fig. 23, 24, 25) agit d'autant plus efficacement ſur l'appui D, que la droite DG menée de ce point D perpendiculairement à la direction pC de la puiſſance p, eſt une ligne plus longue. D'où il ſuit (16) que l'effort réel de cette puiſſance p ſur l'appui D, étant auſſi d'autant plus grand, que la quantité abſolue de cette puiſſance p eſt plus grande, l'expreſſion de l'effort réel de la puiſſance p ſur le point d'appui D, doit être exprimé par $p \times DG$. Or nous avons ſuppoſé (204) qu'une puiſſance quelconque agiſſoit également dans tous les points de ſa direction ; on peut donc dire que la puiſſance p eſt appliquée en G ; & parce que (Elem. 438) la perpendi-

culaire DG mesure la vraie distance du point d'appui D à la direction pC, il suit enfin que l'*expression de l'effort réel, ou de la force rélative d'une puissance quelconque sur un point d'appui, est le produit de la quantité absolue de cette puissance par sa distance au point d'appui.* Cette expression s'appelle le moment de la puissance. En général *le produit de la quantité absolue d'une puissance par sa distance à un point quelconque, à une droite, à un plan, s'appelle le moment de cette puissance, par rapport à ce point, à cette droite, à ce plan.*

335. Il suit de-là que l'*équilibre subsiste dans les leviers par l'égalité des moments autour du point d'appui;* puisque il suppose toujours $p : P :: DS : DG$, & par conséquent $p \times DG = P \times DS$.

336. On considére les moments dans la mécanique, principalement lorsqu'une puissance agissante est appliquée à quelque point d'un corps, dont un autre point est fixe, ou censé fixe, de sorte que cette puissance agissante, tende à faire tourner ce corps sur ce point fixe.

337. Par le mot de *Corps* nous entendrons non-seulement une masse renfermée dans un certain volume, mais encore un composé d'une masse & de lignes droites sans pesanteur, inflexibles, appliquées à cette masse pour la faire mouvoir.

338. On appelle aussi *Systême de Corps*, l'assemblage de plusieurs corps qu'on considére à la fois, soit qu'on les imagine absolument séparés les uns des autres, soit qu'on les suppose attachés ensemble par des droites inflexibles, & sans pesanteur, ce qui est le cas le plus ordinaire.

339. Le centre de gravité ou de pesanteur, est un point pris en dedans ou en dehors d'un corps, ou d'un systême de corps, par lequel ce corps ou ce systême de corps attachés, étant suspendu librement, ou soutenu sur un point fixe, le corps ou le systême de corps reste immobile & en équilibre, comme si toute la pesanteur de ce corps ou de ce systême de corps, étoit réunie en ce point.

340. On appelle *Ligne de direction d'un Corps*, toute droite tirée du centre de gravité de ce corps perpendiculairement

à l'horiſon ou au niveau, parce que tout l'effort de la peſanteur qui ſe trouve réuni au centre de gravité, tend à porter le corps directement au centre de la terre, & par conſéquent perpendiculairement à la ſurface de la terre.

341. D'où il eſt aiſé de concevoir; que *ſi on ſuſpend librement un corps en l'air par un de ſes points, le corps doit ſe mettre en mouvement autour de ce point, pour ſe placer de ſorte que le point de ſuſpenſion ſe trouve dans la ligne de direction.* Car ce qui retient le corps ſuſpendu eſt une puiſſance appliquée au point de ſuſpenſion, & qui détruit l'effet de la peſanteur. La direction dans laquelle cette puiſſance agit doit donc être directement oppoſée à celle de la peſanteur, & par conſéquent dans une droite tirée du centre de la terre au point de ſuſpenſion.

342. De-là on tire une méthode pour trouver par expérience le centre de gravité d'une maſſe quelconque. On la ſuſpend par un point, & l'on marque la droite verticale ou d'à-plomb qui paſſe par ce point. On la ſuſpend enſuite par un autre point, & l'on marque de même la ligne d'à-plomb de ce point: l'interſection de ces deux lignes d'à-plomb, eſt le centre de gravité de la maſſe.

343. Il eſt clair encore que ſi un corps ou un ſyſtême de corps, eſt ſuſpendu à un fil attaché à quelque crochet; le crochet, le point du corps par lequel il eſt ſuſpendu, & ſon centre de gravité, ſont dans une même ligne droite tendante au centre de la terre, ou verticale. Et c'eſt de-là qu'eſt venu l'uſage des poids ou plombs ſuſpendus à des fils, pour trouver les niveaux & les à-plomb.

344. Quoique les lignes & les ſurfaces ne peſent pas, on ne laiſſe pas de ſe ſervir dans les calculs de la mécanique de leurs centres de gravité, en conſidérant ces lignes comme des ſolides, dont deux dimenſions ſont infiniment petites & égales, & ces ſurfaces comme des ſolides, dont une des dimenſions eſt infiniment petite. Nous allons montrer comment on trouve les centres de gravité des lignes, des contours, des ſurfaces & des ſolides, dont on a donné les propriétés dans les Elémens de mathématiques.

345. THEOREME I. *Si un solide est composé d'une matière homogéne, par-tout également dense, & si sa figure est parfaitement symmétrique en tout sens, son centre de figure est en même-tems son centre de gravité.*

DEM. Si de tous les points qui sont d'un côté de la surface de ce solide, on fait passer des droites par le centre, jusques aux points opposés de l'autre côté, ces droites sont divisées en deux également par le centre (Elem. 527) les deux parties de chaque droite sont donc comme deux bras de levier égaux & également chargés, dont par conséquent les momens sont égaux à l'égard du centre qui est le point d'appni. Donc toutes ces droites, & par conséquent tout le solide peut rester eu équilibre sur son centre de figure.

346. COROLL. I. *Le centre de gravité d'une droite est à son point de milieu.*

347. COROLL. II. *Le centre de gravité du contour & de la surface d'un Cercle, d'une Ellipse, d'un Polygone régulier. &c. est au centre de figure.*

348. COROLL. III. Le centre de gravité de la surface d'une Sphère, d'un Polyhédre régulier, est à son centre de figure: celui d'un Prisme, d'un Cylindre, est au milieu de l'axe qui passe par le centre de gravité des deux bases opposées.

349. PROBLEME I. *Etant donnés plusieurs poids* M, m, μ (fig. 40) *suspendus à un levier quelconque aux points* P, p, π, *trouver le point de suspension* Q *de ce levier, de sorte que tous ces poids restent en équilibre, & le levier de niveau.*

SOLUT. Il faut chercher (240) le point d'appui A de deux de ces poids à volonté, comme de M & de *m*; supposant ensuite en A un poids égal à la somme M + *m* des deux qu'on a pris d'abord, il faut chercher de même le point d'appui qui convient au poids A & au poids μ, & ainsi successivement des autres poids tant qu'il y en aura.

350. PROBLEME II. *Trouver le centre de gravité* G *d'un systême de lignes droites*, A, B, C, D. (fig. 41).

SOLUT. Joignez les points de milieux de deux de ces

droites à volonté par une droite AB, que vous regarderez comme un levier chargé à ses extrêmités de deux poids, exprimés par les longueurs de ces deux droites; cherchez-en le point d'équilibre E, en faisant (240) comme la somme de ces deux droites, est à la longueur du levier AB, ainsi une de ces droites comme B, est à la distance AE, du milieu de l'autre droite A au point d'équilibre E. De ce point E menez au milieu d'une autre des droites données une droite EC, que vous regarderez comme un levier chargé au bout E d'un poids égal à la somme des lignes A & B, & au bout C d'un poids représenté par la longueur de la ligne C : cherchez-en de même le point d'équilibre F. De ce point F menez au milieu d'une autre des droites données une droite ou levier FD, dont vous chercherez de même le point d'équilibre G, & ainsi de suite.

351. COROLL. I. La solution de ces deux problêmes étant la même, on peut l'appliquer à d'autres problêmes semblables, comme de trouver le centre de gravité d'un systême quelconque de corps à volonté, dont les centres de gravité particuliers sont donnés de position, & dont les rapports des poids des corps sont aussi donnés.

352. COROLL. II. Par la solution de ce problême, il est aisé de trouver le centre de gravité du contour d'une figure rectiligne quelconque.

353. PROBLEME III. *Trouver le centre le centre de gravité de la surface d'un Triangle* ABC (fig. 42).

SOLUTION. Divisez deux de ses côtés à volonté en deux également, comme en D & en E, & le centre de gravité se trouvera à l'intersection F des droites DC, EA, menées de ces points aux angles opposés C, A. Car EA divise en deux également toutes les droites parallèles à BC qui rempliroient la surface du triangle; donc elle passe par tous leurs centres de gravité, & par conséquent par celui du Triangle: Par la même raison DC y passe aussi.

354. SCHOLIE. C'est par un semblable raisonnement qu'on démontre que *le centre de gravité d'un polygone régulier, dont*

le nombre des côtés est impair, est le même que le centre de figure.

355. COROLL. Si on mene EG parallèle à AB, les triangles semblables CEG, CBD font voir que EG $=\frac{1}{2}$ BD $=\frac{1}{2}$ AD. A cause des triangles semblables DAF, EGF, on a AD : GE :: AF : FE. Or AD $=$ 2GE, donc AF $=$ 2EF. Donc le centre de gravité F est aux $\frac{2}{3}$ de AE, en comptant du sommet A : on démontre de même que CF $=\frac{2}{3}$ CD. Donc *on trouve le centre de gravité d'un triangle, en prenant les deux tiers d'une droite, qui va d'un angle quelconque, au milieu du côté opposé.*

356. PROBLEME IV. *Trouver le centre de gravité d'un Trapeze.*

SOLUTION. Divisez le Trapeze en deux triangles par une diagonale; cherchez le centre de gravité de chacun de ces deux triangles : joignez ces centres par une droite, & regardez-la comme un levier chargé à ses extrêmités de deux poids exprimés par les surfaces des deux Triangles; cherchez-en le point d'appui, ce sera le centre de gravité du Trapeze.

357. AUTRE SOLUTION. Ayant trouvé les centres de gravité de deux Triangles formés par une Diagonale, & les ayant joint par une droite, cherchez & joignez de même les centres de gravité de deux autres Triangles formés par une autre diagonale. L'intersection de ces deux droites se fera au centre de gravité du Trapeze.

358. PROBLEME V. *Trouver le centre de gravité d'un Polygone irrégulier.*

SOLUTION GÉNÉRALE. Divisez-le en autant de Triangles qu'il a de côtés moins deux (Elem. 521); cherchez les centres de gravité, & les surfaces de tous ces Triangles; regardez tous ces centres de gravité comme autant de lieux d'autant de corps, dont le poids est représenté par la surface du triangle, & le centre de gravité du Polygone sera celui du systême de ces corps, ou triangles.

359. SOLUTION *pour le Pentagone.* Divisez le Pentagone par une diagonale en un Trapeze & en un Triangle, joignez les centres de gravité de ces deux parties par une

droite. Divisez le même Pentagone par une autre diagonale en un trapeze & en un triangle ; joignez de même leurs centres de gravité par une droite, qui ira couper la droite précédente au centre de gravité du Pentagone.

360. *Pour les autres Polygones.* On trouve le centre de gravité d'un Hexagone en le divisant à deux fois en deux Trapezes, dont on joint les centres de gravité par deux droites qui se coupent au centre de gravité de l'Hexagone. On trouve de même celui de l'Eptagone à l'aide d'un Trapeze & d'un Pentagone, puis d'un autre Trapeze & d'un autre Pentagone. Celui d'un Octogone, en le partageant à deux fois en deux Pentagones, &c.

361. THEOREME II. *La longueur d'un arc est à celle de sa corde, comme le rayon du cercle est à la distance du centre de gravité de l'arc à son centre de figure.*

DEM. Soit d'abord un arc BAD (fig. 43) divisé en deux également au point A, son centre C, sa corde BD. Les cordes égales AB, AD étant divisées en deux également aux points I, K, le point O milieu de IK est le centre de gravité du systême de ces deux cordes : joignez CK, & les triangles rectangles ACK, CKO, ADG sont semblables, donc AD : DG : : CK : CO : : 2AD : 2DG : : AB + AD : BD. C'est-à-dire, *la somme des deux cordes égales* AB, AD *est à la corde totale* BD, *comme* CK *cosinus de la moitié d'un des arcs, est à* CO *distance du centre de gravité du systême de ces deux cordes au centre de l'arc.*

362. Soit maintenant un arc BAD (fig. 44) divisé en quatre arcs égaux aux points E, A, F : par le milieu de leurs cordes, tirez les droites IH, LK, lesquelles étant parallèles aux cordes AB, AD (à cause des Triangles EAB, EIH qui sont semblables (Elem. 559) aussi bien que les triangles FAD, FLK) seront coupées en deux également aux points M, N, par les rayons CE, CF. Tirez MN qui sera perpendiculaire au rayon AC, (& par conséquent parallèle à la corde BD,) à cause des droites égales CM, CN qui forment un Triangle isoscele MCN, dont l'angle C est coupé en deux également par le rayon AC.

AC. Cela posé, le centre de gravité du systême des quatre cordes BE, EA, AF, FD est en G (350): ayant donc tiré CK, les Triangles rectangles CNK, FDO sont semblables, parce que leur plus petit angle a pour mesure la moitié d'un des quatre arcs égaux; donc CK : CN :: DF : DO :: 2DF : 2DO :: DF + FA : DA. Donc CK : DF + AF :: CN : DA. De même les triangles rectangles GCN, ADP sont semblables, parce qu'ils ont un angle mesuré par la moitié d'un des deux arcs égaux AB, AD; donc CN : DA :: CG : DP : & par conséquent CK : DF + AF :: CG : DP : ou bien DF + AF : DP :: CK : CG :: 2DF + 2AF : 2DP :: BE + EA + AF + FD : BD. Donc la somme des quatre arcs égaux, est à la corde totale, comme CK cosinus de la moitié d'un de ces arcs, est à CG distance des centres de gravité & de figure.

La même chose se démontre de la même manière pour un arc divisé en 8, 16, 32, &c. parties égales en progression géométrique double, d'où il suit que si ce nombre est infini, la somme des cordes deviendra l'arc lui-même, le cosinus d'un demi-arc deviendra le rayon, & la proportion précédente se changera en celle qui fait le Théorême.

363. COROLL. I. *Pour trouver le centre de gravité d'un arc de cercle donné*, comme de 55°. il faut réduire cer arc en parties égales, telles que sont celles du rayon des tables de sinus, par cette analogie, 180° sont à 55°, comme 3,14159 sont à 0,95991. Il faut ensuite prendre la corde de 55°, c'est 0,92350, (double du sinus de $27^o \frac{1}{2}$), & faire comme 0,95991 sont à 0,92350, ainsi 1 est à 0,96207 distance du centre de l'arc à son centre de gravité, qui doit être marqué sur le rayon qui passe au milieu de l'arc.

364. COROLL. II. *Pour trouver le centre de gravité d'un secteur de cercle, il faut trouver, le centre de gravité d'un arc de même nombre de degrés, mais dont le rayon ne soit que les $\frac{2}{3}$ de celui qui ferme le secteur.* Ou ce qui revient au même, il faut prendre sur le rayon qui divise le secteur en deux également, un point qui soit éloigné du centre de l'arc des $\frac{2}{3}$ de la distance du même centre au centre de gravité de

l'arc. Par exemple, pour un secteur de 55° on trouvera 0,64138, ($=\frac{2}{3}$ de 0,96207 trouvés plus haut). Car si on imagine que ce secteur soit divisé en tant de petits secteurs égaux, que chacun puisse passer pour un triangle infiniment étroit, le centre de gravité de chacun de ces triangles se trouvera aux $\frac{2}{3}$ du rayon (355), & par conséquent tous ces centres de gravité formeront un arc concentrique, dont le rayon ne sera que les $\frac{2}{3}$ de celui du secteur; le centre de gravité de cet arc sera donc celui du secteur entier.

365. COROLL. III. *Pour trouver le centre de gravité d'un segment de cercle* ABDA (fig. 45). Il faut regarder ce segment comme faisant partie d'un secteur ACBDA, dont on a retranché le triangle ABC. Or ayant trouvé en P le centre de gravité de ce triangle, en R celui du secteur, & supposé en p celui du segment, on regardera la droite Pp, comme un levier dont le point d'appui est en R, qui porte à son bout P un poids représenté par la surface du triangle ABC, & au bout p un poids représenté par celle du segment, on trouvera donc (241) $Rp = \frac{\textit{surf. triang. } ABC \times PR}{\textit{surf. secteur} - \textit{surf. triang.}}$ $= \frac{\textit{surf. tr.} \times PR}{\textit{surf. segment}}$. Ainsi pour un arc de 55° on trouve CP $=0,59134$, la surface du triangle ABC $=0,40957$, celle du segment $=0,7039$, PR $=0,05004$, & par conséquent Rp $=0,29117$. Donc Cp $=0,93255$, ou Dp $=0,06745$.

366. PROBLEME VI. *Trouver le centre de gravité d'une Pyramide.*

SOLUTION. Il est évident 1°. que les Eléments d'une pyramide étant des polygones semblables à la base & semblablement placés, dont les dimensions décroissent en progression arithmétique depuis la base jusqu'au sommet, la droite qui va du centre de gravité de la base au sommet, passe par les centres de gravité de tous ces Eléments, & par conséquent par celui de la pyramide. 2°. Que si une pyramide est triangulaire, chacune de ses faces pourra être prise pour la base de la pyramide, & l'angle opposé pour

le sommet : D'où il suit que *le centre de gravité de la pyramide triangulaire* SABC (fig. 46) *est à l'intersection* G *de deux droites* SF, AE *tirées de deux angles* S, A *aux centres de gravité des faces opposées* ; ou, ce qui est le même, *aux deux tiers de la longueur de chaque droite* SD, AD *tirée sur le plan de chaque face opposée, depuis les angles* S, A *jusqu'au point* D *milieu du côté de la base opposé à ces angles.* Maintenant si on joint EF : à cause de $DF = \frac{1}{3} DA$, & $DE = \frac{1}{3} DS$, les triangles FDE, ADS sont semblables, de sorte que FE est parallèle à AS, que $FE = \frac{1}{3}$ AS, & que les triangles FGE, SAG sont semblables, ce qui donne FE : AS ou $3FE :: FG : SG = \frac{3FE \times FG}{FE} = 3FG$. Donc $SG = \frac{3}{4} SF$.

Si on divise ensuite la base d'une pyramide quelconque en tant de triangles qu'on voudra, on conçoit aisément que chacun pourra être pris pour la base d'une pyramide, qui aura le même sommet que la pyramide totale, qui deviendra pour lors composée d'autant de pyramides triangulaires. Or si par un point pris aux $\frac{3}{4}$ de la longueur d'une droite menée du sommet de la pyramide totale au centre de gravité de sa base, on imagine un plan parallèle à cette base, toutes les droites tirées du sommet de la pyramide, aux points quelconques de la base, seront aussi coupées par ce plan aux $\frac{3}{4}$ de leur longueur ; donc ce plan passera par le centre de gravité de chaque pyramide triangulaire, ou du systême de pyramides qui composent la totale, & par conséquent par le centre de gravité de la pyramide totale : Donc ce centre est aux $\frac{3}{4}$ de la longueur de la droite tirée du sommet au centre de gravité de la base.

367. Coroll. I. *Le centre de gravité d'un cone droit ou oblique, est aux $\frac{3}{4}$ de son axe, en comptant du sommet.*

368. Coroll. II. *Pour avoir le centre de gravité d'un cone, ou d'une pyramide tronqués par un plan parallèle à la base*, il faut supposer un levier dont le point d'appui est au centre de gravité du cone entier, ou de la pyramide entière, un bout est au centre de gravité du petit cone ou de la petite pyramide enlevés, & l'autre bout est au centre de gravité du restant. H ij

369. PROBLEME VII. *Trouver le centre de gravité d'une demi-ſphère.*

SOLUTION. Soit AB (fig. 47) le diamètre de la demi-ſphère, & de ſon cylindre circonſcrit ABDE, que ſon égale DE ſoit le diamètre de la baſe du cone ECD. Il eſt évident (367) que le cone, qui n'eſt (Elem. 711) que le tiers du cylindre, a ſon centre de gravité en F, à $\frac{3}{4}$ CI; que le cylindre, dont la ſolidité eſt égale à celle de la ſphère & du cone priſes enſemble, a ſon centre de gravité en H, à $\frac{1}{2}$ CI : Donc FH $= \frac{1}{4}$ CI. Regardant le cylindre comme un point d'appui en H, le cone comme une puiſſance en F, & la demi-ſphère comme une puiſſance en G qui maintient l'équilibre, GH & HF seront en raiſon des ſolidités du cone & de la demi-ſphère, donc GH $= \frac{1}{2}$ HF $= \frac{1}{8}$ CI. Par conſéquent CG $=$ CH $-$ GH $= \frac{1}{2}$ CI $- \frac{1}{8}$ CI. Donc IG $= \frac{5}{8}$ CI. C'eſt-à-dire, *le centre de gravité d'une demi-ſphère eſt aux $\frac{3}{8}$ de ſon épaiſſeur ou rayon, en comptant depuis le centre.*

370. THEOREME III. *Si pluſieurs poids ſuſpendus en différents points d'un levier droit, ſont un effort commun ſur un point d'appui de ce levier, la diſtance du point d'appui au point du levier où l'on tiendroit tous ces poids en équilibre, ſi ce levier n'étoit chargé que de ces poids, eſt exprimée par la ſomme des moments de chacun de ces poids par rapport au point d'appui, diviſée par la ſomme des maſſes des poids.*

Par exemple, ſi le levier Rπ (fig. 40) portant un poids S appliqué en R, ſe trouve en équilibre ſur le point d'appui A avec tant de poids M, m, μ qu'on voudra, je dis que le point Q (où l'on tiendroit les poids M, m, μ en équilibre ſi le levier n'étoit que Pπ, ou s'il n'étoit point chargé d'autres poids, (eſt tel, que $AQ = \frac{AP \times M + Ap \times m + A\pi \times \mu}{M + m + \mu}$.

DEM. L'effort que ſoutient le point A eſt égal à la ſomme de tous les efforts que chaque poids fait ſur lui, or l'effort ou moment de chaque poids eſt égal (334) au produit de ce poids par la perpendiculaire tirée du point d'appui ſur ſa direction ; ainſi l'effort du poids M eſt M $\times$ AP, celui de

m eſt $m \times Ap$, & celui de μ eſt $\mu \times A\pi$. Mais parce que ces trois poids feroient en équilibre autour du point Q, ſi on ſuppoſe un poids E égal à la ſomme des trois poids M, m, μ, & qui ſoit ſuſpendu en Q, ſon moment $E \times AQ$ feroit égal à celui de tous les trois poids M, m, μ. Donc $E \times AQ$ ou $(M + m + \mu) \times AQ = M \times AP + m \times Ap + \mu \times A\pi$, & en diviſant, $AQ = \frac{M \times AP + m \times Ap + \mu \times A\pi}{M + m + \mu}$.

371. COROLL. I. Dans une courbe quelconque AMμ (fig. 48) dont le ſommet eſt A, l'axe $A\pi$, une abſciſſe quelconque $AP = x$, ſon ordonnée $PM = y$, ſi ſelon les principes du calcul infinitéſimal, on mene mp parallèle & infiniment proche de PM, on aura Pp ou $MR = dx$, le petit eſpace pM ſera $= y\,dx$, & $\int y\,dx$ exprimera la quadrature de la courbe, ou l'aire compriſe entre ſa dernière ordonnée y, l'abſciſſe correſpondante x, & l'arc de la courbe compris entre la première & la dernière ordonnée. Si donc on regarde tous ces petits eſpaces $y\,dx$ comme autant de poids ſuſpendus à l'axe $A\pi$, & faiſant un effort commun ſur le point A, la même expreſſion $\int y\,dx$ repréſentera la ſomme de tous ces poids; l'effort du moment de chaque poids par rapport au point A ſera $xy\,dx$, & $\int xy\,dx$ exprimera la ſomme de tous ces moments. Donc la diſtance AQ du ſommet A au point Q de l'axe où tous ces poids reſteroient en équilibre, eſt $\frac{\int xy\,dx}{\int y\,dx}$. C'eſt une formule générale pour trouver le centre de gravité des courbes : puiſque ſi l'eſpace $A\pi\mu MA$ étoit ſuſpendu librement au point Q, l'axe $A\pi$ ſe tiendroit de niveau, & que s'il paſſoit de l'autre côté de l'axe, une branche ANB de la même courbe égale & ſemblable, le plan de la courbe entière terminée par une double ordonnée $B\mu$, reſteroit horizontal en équilibre ſur le point Q.

372. D'où l'on voit que *l'on ne peut avoir exactement le centre de gravité que des courbes dont on a la quadrature ;* & réciproquement que *l'on a la quadrature de toutes les courbes dont on peut déterminer géométriquement le centre de gravité.*

373. Pour faire voir l'uſage de la formule $\frac{\int xy\,dx}{\int y\,dx}$ par quelques exemples. Soit BAμ une parabole : on a donc (Elem. 968) $\int y\,dx = \frac{2}{3}xy$, & à cauſe de $yy = x$, ou $x^{\frac{1}{2}} = y$, on a $\frac{2}{3}xy = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$. Par la même raiſon $\int xy\,dx = \int x^{\frac{3}{2}}\,dx$, qui par intégration devient $\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}$ ou $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}$. Diviſant donc cette quantité par $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$, on a $\frac{3}{5}x$, ce qui fait voir que $AQ = \frac{3}{5}A\pi$.

374. De même le diamètre du cercle générateur d'une ſphère étant $= 2r$, on a (Elem. 976) pour l'expreſſion d'un des éléments ou cy-

lindres infiniment minces qui composent la sphère, $cxdx - \frac{cxxdx}{2r}$: donc l'expression de son moment est $cx^2dx - \frac{cx^3dx}{2r}$. D'où il suit que la distance du sommet d'un segment de sphère à son centre de gravité, est égale à l'intégrale $\frac{1}{3}cx^3 - \frac{cx^4}{8r}$, (qui est la somme des moments), divisée par l'intégrale $\frac{1}{2}cxx - \frac{cx^3}{6r}$ de la première expression, (qui est la somme des masses ou cylindres élémentaires), on a donc en réduisant $\frac{8rx - 3xx}{12r - 4x}$ ou $\frac{2rx - \frac{3}{4}xx}{3r - x}$; ce qu'on peut rendre par cette analogie, comme $3r - x$ à $2r - \frac{3}{4}x$, ainsi x, qui est ici l'expression de l'épaisseur du segment de la sphère, est à la distance du sommet de ce segment à son centre de gravité.

375. Enfin on trouvera le centre de gravité d'une zone sphérique par le moyen de celui du segment, comme on trouve celui d'un cone tronqué, par le moyen du cone entier.

Propriétés des Centres de gravité.

Sur leurs Mouvemens, & sur la stabilité des Corps.

376. THEOREME I. *Si deux ou plusieurs corps sont mus uniformément dans un même plan ou dans des plans différents, le centre de gravité de leur système reste fixe, ou se meut uniformément.*

I°. Si deux corps A, B, (fig. 49) dont le centre commun de gravité est en G, sont mus dans la droite AB, en se rapprochant tous deux, ou en s'éloignant tous deux du point G, avec des vitesses en raison inverse de leurs masses, ou ce qui est le même, avec des quantités égales de mouvement, le centre commun de gravité restera fixe au point G.

Car puisque la vitesse du corps A est à celle du corps B comme GB, à GA, les espaces parcourus seront en tems égaux (51) comme GB à GA, donc (Elem. 309) les sommes ou les différences de ces espaces & de GB, GA seront toujours dans la raison inverse des masses, donc le centre de gravité restera toujours en G.

377. II°. Si deux corps A, B (fig. 50) dont le centre commun de gravité est en G, sont mus uniformément en

ſens contraire le long de deux parallèles A*a*, B*b*; enſorte que leurs quantités de mouvement ſoient égales, ou que leurs vîteſſes ſoient en raiſon inverſe des maſſes, ou comme AG, à BG; le centre commun de gravité G reſtera auſſi fixe en G.

Car alors les triangles formés ſur les baſes A*a*, B*b* par les deux droites qui joignent les corps placés en A, B, puis en *a*, *b*, ſont (Elem. 569) ſemblables: donc ces deux droites s'entrecoupent en parties qui ſont entr'elles comme A*a* eſt à B*b*, & par conſéquent comme AG à BG: donc le point d'interſection de ces droites, eſt au centre commun G de gravité des deux corps.

378. III°. Soient deux corps A, B, dont le centre commun de gravité eſt G, (fig. 51 & 52) qu'ils ſoient mus uniformément dans les parallèles A*a*, B*b*, avec des viteſſes quelconques exprimées par les droites A*a*, B*b*. Soient *g* leur centre commun de gravité lorſqu'ils ſont arrivés l'un en *a* l'autre en *b*. Je dis que ſi l'on tire G*g*, ce ſera une droite parallèle à A*a* ou à B*b*, & qu'elle ſera la route que le centre commun de gravité aura parcourue uniformément dans le même tems.

Car puiſque G, *g* ſont les points où ſont placés les centres de gravité, on a BG : *bg* :: BA : *ba*. Donc en prolongeant, (s'il eſt néceſſaire) les droites AB, *ab* juſques à leur rencontre en S, les triangles A*a*S, B*b*S ſont ſemblables, donc SB : S*b* :: BA : *ba* :: BG : *bg*. Donc SB ± BG : S*b* ± *bg* ou SG : S*g* :: SB : S*b*, Donc (Elem 559) les triangles SG*g*, SB*b* ſont ſemblables, donc G*g* eſt parallèle à B*b* (Elem. 509). Et parce que ce qu'on dit ici des corps A, B, placés en *ab* peut s'appliquer à tous les points où ils ſe trouvent en même tems l'un ſur A*a*, l'au-ſur B*b*, il ſuit que chaque pas du centre commun de gravité ſe fait parallélement aux droites A*a*, B*b*; & qu'ainſi ce centre partant de G doit parvenir en *g*, par la droite G*g* parallèle à A*a* ou B*b*.

379. De plus ſi à chaque pas que le corps A fait ſur A*a*, on tire une droite au point S, chacune de ces droites

(prolongée s'il eſt néceſſaire) ira couper B*b* au point où le corps B doit ſe trouver alors. Chacune doit donc paſſer auſſi par leur centre commun de gravité, & comme ce centre eſt néceſſairement placé dans G*g* parallèle à A*a*, les intervalles pris ſur G*g* entre ces droites menées au point S, ſeront toujours proportionnels aux longueurs des pas du corps A ſur la droite A*a*. Or ces intervalles pris ſur G*g*, ſont les pas du centre commun de gravité, correſpondants aux pas du corps A: Donc le mouvement de ce centre eſt toujours comme celui du corps A, c'eſt-à-dire uniforme.

380. IV°. Soient les corps A, B (fig. 53) mus uniformément dans des directions obliques A*a*, B*b*: avec des vîteſſes exprimées par A*a*, B*b*; ſoient G, *g* les lieux du centre commun de gravité; ſi on tire G*g*, & ſi par les points *a*, *b* on lui mene les parallèles *a* P, *b* Q, on pourra regarder les corps A, B, comme animés chacun de deux forces; le corps A, des forces AP, P *a*; & le corps B, des forces BQ, Q*b*. Or les forces AP, BQ ſont entr'elles comme AG à GB. Car à cauſe des parallèles Q*b*, G*g*, P*a*, on a (Elem. 557) GP : GQ : : *ag* : *gb*. Or par la propriété du centre de gravité *ag* : *gb* : : AG : GB. Donc GP : GQ :: AG : GB. Donc AG — GP ou AP : GB — GQ ou BQ : : AG : GB. Donc les forces AP, BQ ne peuvent (376) que contribuer à maintenir le centre commun de gravité en repos en G, donc elles n'ont nul effet pour mettre ce centre en mouvement. Mais les forces P*a*, Q*b* animent les corps A, B, pour aller uniformément dans les parallèles P*a*, Q*b*; donc c'eſt en vertu ſeulement de ces forces que le centre de gravité doit ſe mouvoir, donc il doit aller uniformément de G en *g*.

381. SCHOLIE I. Il eſt évident que cette démonſtration a lieu, ſoit que A*a*, B*b* ſoient dans un même plan, ſoit qu'elles n'y ſoient pas; & que ſi elles ſont dans un même plan, G*g* s'y trouve auſſi.

382. SCHOLIE II. Comme le centre commun de gravité de deux corps peut être regardé comme le centre de gra-

vité particulier à un corps, dont la masse seroit égale à la somme des masses des deux corps ; qu'on peut ensuite comparer ce corps à un troisieme, de la même maniere que nous avons comparé A à B ; il est clair qu'on peut démontrer par des raisonnements semblables aux précédents, que le centre de gravité d'un systême des trois corps mus uniformément dans un même plan, ou dans des plans différents, reste en repos, ou est transporté uniformément en ligne droite. On peut enfin appliquer les mêmes raisonnements à un systême de tant de corps qu'on voudra, pourvu qu'ils soient tous mus uniformément.

383. SCHOLIE III. Si on regarde les espaces Aa, Bb (fig. 51 & 52) comme des côtés homologues de deux Poligones symmétriques, concentriques & semblables, il est évident que Gg sera aussi un côté homologue d'un autre Poligone symmétrique, concentrique & semblable, ce qu'on pourra appliquer aussi aux courbes, & en conclure, par exemple : *Que si tant de corps qu'on voudra décrivent en même tems chacun une courbe symmétrique, concentrique & semblable, en partant tous ensemble d'un point ou côté homologue, ou du point ou côté parallèle opposé & correspondant, le centre de gravité du systême de tous ces corps, ou même celui d'un systême composé de tant de ces corps qu'on voudra, restera fixe au centre commun des courbes, ou bien il décrira en même tems une courbe concentrique, symmétrique, & semblable.*

384. THEOREME II. *Les effets produits par le mouvement d'un systême de corps, doivent s'estimer de même que si tout ce systême étoit réduit en un point, égal en masse à la somme de toutes les masses, & placé au centre de gravité du systême.*

DEM. I. Soient deux corps A, B (fig. 51 & 52) dont les masses soient exprimées par M, N : que leur centre de gravité commun soit en G, qu'ils soient mus dans les parallèles Aa, Bb, on a par la nature du centre de gravité & par la construction des figures, $M : M + N :: BG : BA :: bE : bD :: Eg : Da$. Donc $Eg \times (M + N) = Da \times M$. Or à cause de $Gg = Bb \pm Eg$, ($+$ est pour la fig. 51, & $-$ pour la fig. 52) on a $Gg \times (M + N) = Bb$

$\times (M+N) \pm Eg \times (M+N) = Bb \times (M+N) \pm Da \times M = (Bb \pm Da) \times M + Bb \times N = \pm Aa \times M + Bb \times N$. Donc $Gg \times (M+N) = \pm Aa \times M + Bb \times N$. C'eſt-à-dire, que la quantité de mouvement de la ſomme M + N des maſſes, placée au centre commun G de gravité, eſt égale à la ſomme des quantités de mouvement de chaque corps A, B s'ils vont dans le même ſens, ou à leur différence, s'ils vont en ſens contraire : ou, ce qui revient au même, elle produit ſeule le même effet, que les deux corps A & B enſemble.

385. II°. Si les directions A *a*, B *b*, (fig. 54) ne ſont pas parallèles, on les pourra décompoſer chacune en deux, ſavoir en AE, BH parallèles à *ab*, & en *a* E, *b* H parallèles à G*g*, route du centre commun de gravité. Or à cauſe des parallèles EP, QH les triangles AEP, BQH ſont ſemblables : Donc AP : BQ :: AE : BH. Donc $AP \times M : AE \times M :: BQ \times N : BH \times N$. Or (359) AP : BQ :: AG : BG :: N : M ; donc $AP \times M = BQ \times N$; & par conſéquent (Elem 306) $AE \times M = BH \times N$: & parce que ces deux expreſſions ſont celles des quantités de mouvemens des corps A & B, leſquelles étant parallèles à *ab*, égales, & en ſens oppoſé, ſont entiérement nulles à l'égard de *a b*, reſte donc que $Ea \times M$, & $Hb \times N$, ſoient les expreſſions des quantités de mouvement des corps A & B à l'égard de *ab*. Mais à cauſe des parallèles EP, QH, on a (Elem. 569) GP : GQ :: GE : GH. Or (380) GP : GQ :: N : M. Donc GE : GH :: N : M. Donc G eſt la place du centre commun de gravité des puiſſances M, N qui placées en E, H, ſont mues vers *ab*, ſelon les directions E *a*, H *b* parallèles entr'elles & à G*g*. Donc (72) leurs quantités de mouvement réunies n'équivalent qu'à celle d'une ſeule puiſſance en G égale à la ſomme de leurs maſſes.

386. SCHOLIE. I. Ce qu'on dit ici de deux corps A, B peut s'appliquer à tant de corps A, B, C, D, &c. qu'on voudra, parce qu'on peut réduire la quantité de mouvements des deux premiers A, B, à celle d'un ſeul K égal en maſſe à celles de A & de B, & placé à leur centre com-

mun de gravité, puis raisonner de même sur K & C, en les réduisant à un seul corps L égal en masse à la somme de celles de A, B, C, & placé au centre de gravité du systême de ces trois corps, & ainsi successivement.

387. SCHOLIE II. On peut regarder la droite *ab* (fig. 55 & 56) comme recevant l'effort des corps A, B qui la viennent frapper en même tems avec des vitesses exprimées par les droites A*a*, B*b*. Si donc par les points A, B, G, on abaisse sur *a b* les perpendiculaires AK, BL, GE, il est clair, 1°. que M × AK, N × BL, & (M + N) × GE seront (334) les expressions des momens, ou des efforts des trois puissances sur la droite *ab* : 2° qu'à cause des directions parallèles A*a*, G*g*, B*b*, & des perpendiculaires aussi parallèles AK, GE, BL, les triangles A*a k*, G*g* E, B*b* L sont semblables, donc les vîtesses A*a*, G*g*, B*b* sont entr'elles comme ces perpendiculaires : donc en substituant le rapport des perpendiculaires à celui des vîtesses, on verra également que le moment du centre commun de gravité G produit seul à l'égard de la droite *ab* le même effet que les momens réunis des corps A, B : & en général, que *d'un systême quelconque de corps placés dans des plans quelconques, & mus le long de lignes tellement disposées, qu'ils puissent frapper en même tems une même droite ; le moment du centre de gravité de ce systême par rapport à cette droite, équivaut à tous les momens réunis de chacun des corps qui composent ce systême.*

388. SCHOLIE III. Si les corps n'étoient pas tous dirigés à une même droite, mais à un même plan, on concluroit la même chose par rapport à ce plan, que l'on vient de voir par rapport à cette droite. Car on pourroit comparer de même les momens réunis de deux de ces corps tendants vers ce plan par deux directions parallèles, ou décomposées chacune en deux, les unes parallèles à la route du centre de gravité commun des deux corps comparés ; les autres parallèles au plan ; on pourroit, dis-je, les comparer avec le moment d'un point égal à la somme des masses de ces deux corps, & placé à leur centre commun

de gravité ; puis le moment de ce point & celui d'un troisième corps, au moment de leur centre commun de gravité, & ainsi de suite.

389. THEOREME III. *Le mouvement du centre commun de gravité de deux corps sphériques à ressort parfait, n'est altéré ni détourné par le choc.*

DEM. Puisque (189) à des instants également éloignés de celui du choc, les droites AB, IH (fig. 17) qui joignent les centres des corps A, B sont égales entr'elles, il suit que le centre de gravité commun des corps A, B qui divise toujours dans un même rapport la droite qui les joint, est placé de la même manière sur AB & sur IH, en sorte que s'il est en R sur AB, il est en T sur IH, & que AR = HT ou RB = IT. Et parce que d'ailleurs les droites AB, IH sont également inclinées par rapport à l'axe de contact GL, (à cause de l'égalité des Trapezes ABFG, LIHP appliqués par leurs angles droits sur GL), il suit qu'aux instans également éloignés de celui du choc, les pas du centre commun de gravité étant faits sur des droites égales, également inclinées, & également éloignées par rapport à l'axe de contact, ils sont égaux entr'eux, & ils écartent également ce centre de l'axe de contact GL. Donc on a non-seulement SR = ST, mais aussi les perpendiculaires RX & TO, qui mesurent les écarts à l'égard de GL, sont égales entr'elles, & les triangles rectangles RXS, TSO sont égaux & semblables. Or 1°. dans ces triangles les côtés SX, SO sont dans une même droite ; donc les côtés RS, ST sont aussi dans une même droite ; donc la route du centre de gravité n'a pas été détournée par le choc. 2°. Avant le choc le centre commun de gravité est parvenu uniformément de R en S (380) : donc après le choc, il est parvenu uniformément de S en T ; donc son mouvement n'a pas été altéré par le choc.

390. SCHOLIE. Puisque (187) les corps sans ressort vont après un choc oblique dans des directions parallèles, & après avoir perdu une partie de leurs forces, il est clair que la route de leur centre commun de gravité est détournée par

ce choc. Et il est facile de concevoir que cet effet n'arrive pas dans le choc des corps à ressort parfait, parce que la force de restitution est égale & directement opposée à celle de la compression, & qu'ainsi le choc ne détruit rien dans les forces, il ne fait qu'en changer ce qu'elles avoient d'opposé, en des directions contraires. De-là on pourra conclure, que *lorsque l'action des corps à l'égard les uns des autres sera mutuelle, & ne tendra qu'à faire changer en sens contraire ce qu'elles ont d'opposé dans leurs directions, le mouvement de leur centre commun de gravité ne sera détourné ni altéré par l'effet de ces actions.* Tels seroient des corps qui s'attireroient ou se repousseroient mutuellement.

391. THEOR. IV. *La droite* CH (fig. 5) *qui est la direction & l'expression de la force composée des forces* CD, CA, CE, CG, *passe par le centre de gravité* L *des points* D, A, E, G, *où les forces sont censées appliquées, & elle est égale au produit de* CL *multipliée par le nombre des forces composantes.*

DEM. La droite CB est la direction & l'expression d'une force composée des forces CD, CA, & elle passe par le point M milieu de la diagonale DA, où est le centre de gravité des points D, A, en sorte que $CB = 2CM = CM \times 2$. De même CK passe par le centre de gravité N des points E, G, & elle est $= CN \times 2$. Or CH représente la force composée des forces CB, CK : si donc on tire MN & BK, les triangles CMN, CBK seront semblables (Elem. 559) puisque $CM = \frac{1}{2} CB$, & $CN = \frac{1}{2} CK$. Donc 1°. à cause de $BR = KR$, on a $ML = LN$, & par conséquent L est le centre de gravité des points M, N, ou des points D, A, E, G. 2°. $CL = \frac{1}{2} CR = \frac{1}{4} CH$, ou $CH = CL \times 4$. Donc CH passe par le centre de gravité L des points D, A, E, G, & est égale à CL multipliée par le nombre de ces points.

392. COROLL. I. *Si par les points où sont placées trois puissances en équilibre autour d'un point* C, *on tire les droites qui forment un Triangle, le point* C *sera le centre de gravité de ce Triangle.*

393. REM. Cette propriété du centre de gravité a lieu,

soit que le point C soit dans le plan qui passe par les trois points où sont placées les puissances, soit que ce point C soit hors de ce plan, puisque (89) les forces PC, QC, *p*C (fig. 4) se réduisent à la seule BC, en composant d'abord la force AC des deux PC, QC, qui sont dans un même plan, de sorte que cette force composée passe par le centre de gravité N des points P, Q, & est = 2CN : puis en composant la force BC des forces AC, *p*C, qui sont dans le plan diagonal, & où l'on voit, comme ci-dessus, que cette force BC passe par le centre commun de gravité L des points M, N, c'est à-dire, des points P, Q, *p* ; & qu'enfin CL = $\frac{1}{3}$ CB.

394. COROLL. II. *Si quatre puissances placées en* A, B, C, S (fig. 46) *& qui ne sont pas dans un même plan, sont en équilibre autour d'un point* G *sur lequel elles agissent à la fois selon des forces exprimées par les droites* AG, BG, CG, SG, *le point* G *est le centre de gravité d'une Pyramide* SABCA *aux angles de laquelle sont terminées les droites qui représentent ces forces.* Car soit F le centre de gravité du Triangle ABC, il est clair (89) que FG sera la direction de la force composée des forces AG, BG, CG, & que cette force composée est = 3FG. Or la force SG faisant équilibre, il faut 1°. qu'elle soit dans la direction opposée à FG, 2°. qu'elle soit égale à 3FG. Donc (366) le point G est le centre de la pyramide SABCA.

395. THEOREME V. *Toute surface ou tout solide formé par un mouvement quelconque d'une ligne ou d'une surface, est égal au produit de cette ligne ou de cette surface multipliée par le chemin que son centre de gravité a parcouru.* *

DEM. On peut considérer les surfaces & les corps solides ; comme formés de matiere homogene de même densité, & alors on conçoit qu'on peut représenter ces surfaces &

* Ce Théorême qui contient un principe d'un très grand usage dans la Géométrie pour trouver les dimensions de toutes sortes de figure & de solides, & dans la Mécanique pour trouver les centres de gravité des figures ou solides dont connoit les dimensions, s'appel e communément la *Regle de Guldin* parce que le P Guldin, Jésuite, est le premier qui l'ait développé ; il paroit par les Ouvrages de Pappus qu'il n'étoit pas inconnu aux Anciens.

les solidités de ces corps par leur poids. Or il est évident qu'un poids formé par le mouvement d'un poids générateur, est égal à ce poids générateur pris autant de fois qu'il a fait de pas. Mais (202) le poids d'une quantité quelconque est censé résider dans son centre de gravité : donc le nombre des pas du poids est déterminé par le nombre des points de la route du centre de gravité ; donc *pour avoir le poids ou le volume d'une figure produite par une ligne ou par une surface quelconque, il faut multiplier le poids de la quantité génératrice, c'est-à-dire, la quantité génétratrice même par la route de son centre de gravité.*

Par exemple. Un cylindre étant produit (Elem. *656*) par un rectangle ab qui tourne sur un de ses côtés a : le centre de gravité de ce rectangle est éloigné du côté a de $\frac{1}{2}b$: soit le rapport du rayon d'un cercle à sa circonférence $\frac{7}{44}$, la route du centre de gravité sera $\frac{22b}{7}$; (car $7 : 44 :: \frac{1}{2}b : \frac{22b}{7}$). En la multipliant, suivant ce Théorême par ab surface du rectangle, on aura $\frac{22abb}{7}$ pour la solidité du cylindre. Suivant les Elémens (709) cette solidité est égale au produit de la hauteur a par la surface de la base, laquelle étant un cercle dont le rayon est b, est égale à $\frac{22bb}{7}$.

Pour avoir la surface du cylindre par cette régle, il faut considérer que cette surface a été produite par la rotation d'une ligne a à la distance b de l'axe de révolution ; la route du centre de gravité est donc un cercle $\frac{44b}{7}$: en le multipliant par la quantité génératrice a, on aura $\frac{44ab}{7}$ pour la surface cherchée, ce qui est conforme aux Elémens (*690*).

396. THEOREME VI. *Si la ligne de direction* DF (fig. *57*) *passe par la base* CE *d'un corps* AEC *posé sur un plan horizontal, & qui n'est poussé d'ailleurs ni retenu par aucune autre force que par celle de sa pésanteur, ce corps restera debout, quelle que soit sa figure.*

DEM. Car s'il pouvoit tomber, ce ne seroit qu'en tournant sur un de ses angles C, & alors son centre de gravité D seroit obligé de décrire l'arc DG qui a CD pour rayon, lequel étant plus long que DF, fait voir qu'il faudroit que ce centre de gravité s'élevât jusqu'en H au-dessus du plan CE, ce qui est impossible, à cause que la pesanteur, qui est la cause de la chûte des corps, pousse toujours leur centre de gravité en embas.

397. THEOREME VII. *Si la ligne de direction d'un corps passe au-delà de sa base, il tombera, sur quelque plan qu'il soit posé.*

DEM. Car, par exemple, le corps AEC étant dans la position *ae*C, où sa direction *df* passe au-delà de sa base C*e*, il doit tomber, parce que sa pesanteur tend à faire approcher de plus en plus son centre de gravité vers celui de la terre, & par conséquent à lui faire décrire l'arc *d*G, dont tous les points approchent de plus en plus du plan CE, c'est-à-dire du centre de la terre.

398. THEOREME VIII. *Si la ligne de direction* ck (fig. 58) *passe par la base* ad *d'un corps posé sur un plan incliné, ce corps glissera.*

DEM. Car alors la pesanteur représentée par *ck* étant plus grande que la force *ce* qui le retient sur le plan incliné (261) doit faire glisser ou rouler le corps le long de ce plan; mais pour le faire descendre en roulant, il faudroit que le centre de gravité *c* décrivît autour du point *a* un arc dont le rayon *cd* fût plus grand que *ck*, & que par conséquent il s'élevât davantage sur le plan incliné, ce qui ne peut arriver en vertu de la gravité seule. Reste donc qu'il descende en glissant.

399. THEOR. IX. *Si la ligne de direction d'un polyhédre posé sur un plan incliné, passe toujours en dehors de la face qui porte sur ce plan, le polyhédre descendra en roulant à cause du frottement de cette face sur ce plan.*

Car si CK (fig. 58) représente la quantité absolue de la pesanteur qui agit sur le polyhédre, CE perpendiculaire au plan incliné représentera ce que ce plan en supporte, ou ce que le plan détruit de cette quantité, & CF parallèle

parallèle au plan représente ce qui reste de la pesanteur, ou son effort relatif. D'où il suit que puisque les mouvements ne sont produits qu'en vertu des forces relatives, & dans la direction de ces forces relatives (86), le Polyhédre n'est porté, en vertu de la force CF, qu'à se mouvoir parallélement au plan incliné. Donc s'il ne se rencontroit pas d'autres circonstances dans ce mouvement, le polyhédre glisseroit sur sa face AB le long du plan incliné : Mais en commençant à glisser, cette face éprouve une résistance par son frottement sur le plan incliné, & cette résistance fait l'effet d'une force qui agiroit sur le Polyhédre (déja mu selon CF) dans la direction EG qui ne passe pas par son centre de gravité. On verra dans la suite (457 & 458) que cette force doit détruire une partie du mouvement selon CE, & procurer en même temps une rotation au Polyhédre, qui le fera trébucher sur la face BH, & ainsi successivement.

400. SCHOLIE. Si la perpendiculaire CE tomboit en dehors de la face AB, il est évident (397) que le polyhédre trébucheroit indépendamment du frottement, & que par conséquent il tendroit à glisser & à trébucher en même temps.

401. THEOR. X. *Un corps quelconque* ABDEF (fig. 59) *dont une des faces* BD *est posée sur un plan incliné, ne peut être retenu sur cette face par une puissance quelconque* R, *qui l'attire vers le sommet de ce plan incliné, à moins que cette puissance n'agisse suivant une ligne qui aille rencontrer la ligne de direction* IL *de la pesanteur de ce corps, en quelqu'un des points compris entre* I *&* K, *où aboutissent les perpendiculaires au plan incliné* ID, KB *tirées par les extrêmités de la face de ce corps, qui porte sur le plan incliné.*

DEM. Je dis que si la puissance R, qui fait monter le corps le long du plan, agit selon une droite RE, qui rencontre la ligne de direction IL en un point H, qui soit en-deçà ou au-delà des limites I, K, le corps culbutera sur la face AB. Car si du point H auquel on peut supposer que la puissance R est appliquée (204), on abaisse sur le

plan incliné la perpendiculaire HM, & si du point M on tire MN parallèle à IL, & ML parallèle à RH, on a le parallèlogramme HLMN dans lequel HL représente le poids du corps, ou l'effort de sa pesanteur, HN l'effort de la puissance R, & HM la charge du plan incliné. On peut donc substituer la force HM aux deux forces exprimées par HN & HL : Or HM passe au-delà de la base BD du corps; donc (499) l'effort exprimé par HM fera culbuter le corps sur la face AB, quel que soit l'effort de la puissance R.

402. COROLL. *Si on applique une puissance à un point quelconque de la surface d'une sphère, pour la retenir sur un plan incliné, la sphère tournera jusqu'à ce que la direction de cette puissance passe par le centre de gravité de la sphère.* Ce qu'on peut appliquer à tous les corps dont la surface est courbe, lorsque ces corps ne peuvent toucher un plan incliné que dans un point.

403. REMARQUES. Une boule posée sur un plan horizontal reste immobile, parce que sa direction passe par sa base, c'est-à-dire par le point de contact : mais pour peu que le plan soit incliné, elle roule en embas, parce que sa direction ne passe plus par le point de contact.

C'est pour éviter la chûte que les animaux se ployent naturellement le corps en arrière, lorsqu'ils descendent, & en avant, lorsqu'ils montent : Que les hommes portent le corps de droite à gauche, & de gauche à droite à chaque pas qu'ils font : Que ceux qui portent un fardeau sur le dos, baissent la tête : Que ceux qui portent un fardeau qui pend à une main, étendent l'autre : Que ceux qui sont replets se tiennent droits. Toutes ces postures qu'on prend involontairement, ne servent qu'à faire constamment passer la ligne de direction par les pieds, sans quoi on tomberoit infailliblement.

Une boule posée sur un plan horizontal, puis frappée dans une direction qui passe par son centre, va cependant en roulant sur ce plan, quoiqu'elle y dût glisser dans cette supposition ; mais il est évident par ce qu'on vient de dire (399) que le frottement en est la cause.

TROISIÈME PARTIE.

Des Mouvemens en ligne courbe.

404. Il est clair que le mouvement primitivement imprimé à tout corps, (qui n'a par lui-même que de l'inertie,) ne peut continuer à être uniformément le même, si le corps n'est absolument abandonné à lui-même, & s'il ne se trouve dans un milieu parfaitement libre. Mais 1°. si le corps se trouve exposé à l'action continuelle de quelque force étrangère, telle qu'est la pesanteur : 2°. ou si l'un de ses points se trouve inébranlable, ou assujetti à ne pouvoir être mu que d'une certaine façon ; comme s'il ne pouvoit couler que dans une rainure, &c. 3°. ou si le corps est lié à un ou à plusieurs autres corps en repos ou en mouvement ; soit que les liens soient flexibles, soit qu'ils soient inflexibles. 4°. ou si le milieu où le corps se trouve, fait une résistance par la difficulté plus ou moins grande de le pénétrer. 5°. ou si le corps frotte sur quelque surface, &c. Enfin si le corps se trouve dans deux ou dans plusieurs de ces circonstances à la fois, il est évident que son mouvement primitivement imprimé, doit être modifié à tout moment par autant de forces particulières.

Ces forces s'appellent *accélératrices* ou *retardatrices*, selon qu'elles tendent à accélérer ou à retarder la vîtesse du mouvement primitivement imprimé ; & il est évident que le corps suit nécessairement un mouvement composé de la force qui lui a été primitivement imprimée, & de chacune de celles qui l'affectent dans les circonstances où il se trouve ; de sorte qu'on ne peut connoître le mouvement que le corps suivra réellement, si on ne trouve des expressions exactes de chacune de ces forces en particulier, leurs directions, & si l'on ne fait une combinaison exacte de tous leurs efforts réunis, pour produire le mouvement composé dont il s'agit. Cette partie de la Mécanique s'appelle communément *la Dynamique.*

I ij

Comme la combinaison des forces différentes produit presque toujours des mouvemens en ligne courbe, nous examinerons ici ce qu'il y a de plus intéressant dans ces sortes de mouvemens, sur lesquels cependant on ne peut faire de recherches un peu profondes, qu'à l'aide de la Géométrie & de l'Analyse infinitésimale la plus sublime.

ARTICLE I.

Origine & propriétés générales du Mouvement en ligne courbe.

405. THEOR. I. *UN mouvement inégal quelconque soit rectiligne soit curviligne, peut être regardé comme une suite infinie de mouvemens rectilignes & uniformes pendant chaque instant infiniment petit de la durée finie de ce mouvement. Et on peut concevoir, que ce n'est qu'au commencement de chacun de ces instans infiniment petits, que le mobile reçoit une variation dans sa vîtesse & dans sa direction, lesquelles subsistent, sans varier davantage, pendant toute la durée de cet instant infiniment petit.*

Car pendant chaque instant infiniment petit un mobile ne peut faire qu'un pas : Un pas comparé au suivant peut bien ne lui être pas égal, ni dans la même direction ; mais on ne peut concevoir d'inégalité ni de détour dans un pas infiniment petit pris séparément.

406. COROLL. *On peut* donc, *pour chaque instant infiniment petit, exprimer les circonstances actuelles d'un mouvement quelconque par les propriétés & par les formules du mouvement rectiligne & uniforme.*

407. THEOR. II. *Un corps animé par deux puissances à la fois ou par tant de puissances qu'on voudra, réduites par la composition à deux seules, dont les directions font un angle, décrit une ligne droite, si ces deux puissances sont de même nature,* c'est-à-dire, ou toutes deux uniformes, ou toutes deux variables suivant une même loi, &c. *Mais si ces deux puis-*

ſances ſont de différente nature, il décrit une courbe (qu'on appelle en général une Trajectoire,) *dont l'eſpèce dépend du rapport que les efforts de ces deux puiſſances ont entr'eux à chaque inſtant.*

DEM. Soient deux puiſſances quelconques qui animent le corps C (Fig. 60 & 61) dans les directions CD, CA, dont l'une ſoit capable de pouſſer le corps de C en D en trois inſtans infiniment petits égaux, & l'autre de C en A pendant les trois mêmes inſtans. Ayant diviſé CD & CA chacune en trois parties, ſuivant les rapports qu'ont entr'elles ces deux puiſſances, & ayant achevé les parallélogrammes GE, HF, AD, il eſt clair, 1°. Qu'à la fin du premier inſtant le corps ſe trouvera en I, à la fin du ſecond en K, à la fin du troiſieme en B. Car à cauſe des inſtans infiniment petits, chacune de ces puiſſances agit uniformément pendant leur durée: donc au commencement du premier inſtant le corps étant animé de deux forces capables de le pouſſer l'une de C en E, l'autre de C en G dans le même temps, doit être en I à la fin de cet inſtant. Et parce que les deux premiers inſtants pris enſemble ne forment encore qu'un tems infiniment petit, on peut ſuppoſer, en faiſant abſtraction du premier inſtant, qu'au commencement du mouvement le corps eſt animé de deux forces capables de le pouſſer, l'une de C en F, l'autre de C en H pendant un certain même temps; donc à la fin de ce temps le corps ſera en K au bout de la diagonale CK. De même à cauſe que la ſomme des trois inſtans ne fait qu'un tems infiniment petit, on peut ſuppoſer, en faiſant abſtraction des deux premiers inſtans, qu'au commencement du mouvement le corps eſt ſollicité d'aller de C en D, & en même temps de C en A, & par conſéquent il doit aller de C en B, & ſe trouver en B à la fin du troiſieme inſtant.

2°. Il eſt évident que ſi les puiſſances ſont de même nature (fig. 60) les droites CA, CD, ſont diviſées dans une même raiſon, & par conſéquent les lignes CE, CF, CD, ſont reſpectivement proportionnelles aux lignes CG, CH, CA. Or à cauſe des parallélogrammes, les angles CEI, CFK, CDB, ſont égaux, & les droites EI, FK,

DB, égales aux lignes CG, CH, CA, font par conféquent proportionnelles aux lignes CE, CF, CD. Donc les triangles CEI, CFK, CDB, font femblables (Elem. 559); donc leurs angles en C font égaux, donc les côtés CE, CF, CD, étant tous dans une même droite CD, leurs côtés CI, CK, CB, & par conféquent les points C, I, K, B, font auffi en ligne droite. Donc fi les deux puiffances font de même nature, elles font aller le corps en ligne droite.

Mais fi les deux puiffances font de différente nature, comme fi CD (fig. 61) repréfentoit une puiffance uniforme, & CA une force accélératrice conftante, les droites EI, FK, DB, ne font pas proportionnelles aux droites CE, CF, CD; car CG eft plus petite que GH, tandis que CE = EF. Donc les triangles CEI, CFK, CDB, ne font pas femblables, & par conféquent leurs angles en E, F, D, étant égaux, leurs angles en C ne le font pas: donc les côtés CE, CF, CD, étant couchés fur une même droite, les côtés CI, CK, CB, ne le font pas; donc les points C, I, K, B, ne font pas en ligne droite.

3°. Si on regarde CA comme un diamètre de la courbe CIKB, les parties CG, CH, CA, feront des abfciffes, & les parallèles GI, HK, AB, les ordonnées; ou bien fi on rapporte la courbe à CD, les parallélogrammes GE, HF, AD, feront les parallélogrammes des coordonnées (Elem. 775). Or (Elem. 767) la nature d'une courbe dépend du rapport conftant des fonctions des abfciffes aux fonctions des ordonnées. Donc *la courbe décrite en vertu de deux forces de différente nature, dépend du rapport que ces deux forces ont entr'elles à chaque inftant.*

408. Par exemple, dans l'hypothèfe précédente, la courbe CIKB eft une parabole. Car la force exprimée par CD étant uniforme, les efpaces CE, CF, CD, font entr'eux comme les temps, & par conféquent ces droites, ou leurs égales GI, HK, AB, repréfentent les temps comptés depuis le commencement du mouvement: & la force fuivant CA étant accélératrice conftante, les efpaces CG, CH, CA, font entr'eux (99) comme les quarrés des temps,

ou comme les quarrés des droites GI, HK, AB. Donc la courbe CIKB est telle, que ses abscisses CG, CH, CA sont entr'elles comme les quarrés des ordonnées GI, HK, AB. Donc (Elem. 821) c'est une parabole.

409. Pour faire concevoir ceci par un exemple plus général : *Soit un corps* P (fig. 62) *animé de deux forces, l'une toujours uniforme*, & qui par conséquent tende à le faire aller uniformément dans la direction où il se trouve à la fin de chaque instant, & *l'autre constante ou variable à volonté, mais toujours dirigée à un même point fixe* S, *vers lequel elle tâche sans cesse de ramener le corps* P; *ce corps décrira une courbe* PQ*p*O, *toujours concave du côté du point fixe* S.

Car si on partage une durée finie quelconque de ce mouvement en instants infiniment petits égaux, & si on suppose que le corps P ayant déja parcouru l'espace infiniment petit PQ, vienne à recevoir au commencement de l'instant suivant une impression vers S exprimée par la droite QG, il est clair que le corps P, qui sans cette nouvelle impression étant abandonné à sa seule force uniforme, auroit parcouru pendant cet instant l'espace QF égal & dans la même ligne que PQ, est contraint de parcourir la diagonale Q*p* du parallélogramme QF*p*G, & qu'il se trouve en *p* à la fin de cet instant. Par la même raison à la fin de l'instant suivant, le corps se trouveroit en E, ensorte que *p*E = Q*p*, s'il ne recevoit au commencement une nouvelle impression vers S exprimée par *p*H, (or *p*H = QG, si la force dirigée au point S est toujours constante, & ces deux quantités sont inégales, si cette force est variable,) laquelle l'oblige à suivre la diagonale *p*O. Ainsi l'effort continuel de la force uniforme compliqué avec celui de la force qui ramene toujours le corps vers S, fait décrire au corps P la courbe PQ*p*O concave vers le point S, & dont la nature dépend aussi du rapport des deux forces, & de leurs positions à chaque instant.

410. Si, par exemple, la ligne SQ (fig. 63) est perpendiculaire à PF direction de la force uniforme, & si les quantités PI, QG, *p*H, dont la force centrale ramene à

chaque inſtant le corps vers S, ſont préciſément égales aux quantités QR, pF, OE, dont la direction de la force uniforme écarte le corps du point S, il eſt clair que la courbe PQpO eſt un cercle, parce que par la combinaiſon de ces deux forces, le corps eſt toujours également éloigné du point S.

411. Remarque. Comme la combinaiſon de l'effet de pluſieurs forces réunies eſt infinie, nous examinerons ſeulement les mouvements curvilignes qui ſont les plus ordinaires; or de tous ces mouvemens il n'y en a preſqu'aucun qui ne ſe rapporte principalement à quelque point déterminé & cenſé fixe. Les corps qui tournent en rond, les Planétes, par exemple, ſe rapportent à quelque centre, les corps jettés obliquement en l'air décrivent des courbes qui ſe rapportent au centre de la terre : en général on ne trouve guere dans la nature de mouvement en ligne courbe, qui ne ſoit l'effet conjoint d'une impulſion conſtante & uniforme ſuivant une direction quelconque, & d'une ou pluſieurs forces variables ſuivant une certaine loi, qui pouſſe ou attire en même-tems vers certains points déterminés.

412. La force qui pouſſe ou qui attire vers un certain point un corps qui a reçu une impulſion conſtante dans une direction quelconque, s'appelle *force centrale.* Elle s'appelle *force centripéte*, quand on la conçoit inhérente au corps : ainſi on peut regarder la peſanteur d'une pierre, (quelle qu'en ſoit la cauſe,) comme une force centripéte qui y réſide, & qui la ſollicite ſans ceſſe à s'approcher du centre de la terre. Et comme l'effet de l'impulſion conſtante eſt de tendre toujours à faire décrire uniformément une ligne droite, le corps qu'elle anime dans une direction différente de celle qui tend à ce centre, tend à s'en éloigner, & la partie de ſa force abſolue qui l'en écarte de la ſorte, s'appelle ſa *force centrifuge.* Cet effort eſt égal & dans la direction oppoſée à la force centripéte, car il n'eſt autre choſe qu'une réaction. C'eſt pourquoi on les conſidére ſous le nom commun de force centrale.

413. Nous renvoyons au Traité d'Aſtronomie la théorie

des forces centrales dans les mouvements curvilignes en général, & en particulier dans ceux des corps qui tournent comme les Planétes & les Cométes. Ainsi après avoir donné quelques principes généraux sur les mouvements en ligne courbe, nous traiterons du mouvement *de projection*, c'est celui des corps jettés obliquement; nous expliquerons ensuite le mouvement de *rotation* & celui *d'oscillation*.

Principes généraux sur les Mouvements en ligne courbe.

414. THEOR. III. *Si un corps* B (fig. 64) *est mu le long d'une courbe* ABCD, ou ce qui revient au même, *si un corps glisse dans la concavité d'un solide quelconque* (non élastique & sans frottement), *le changement de direction qu'il est obligé de faire à chaque côté infiniment petit de la courbe, ne lui fait perdre de sa vîtesse, qu'une quantité infiniment petite du second ordre.*

DEM. Si après que le corps B a décrit le côté infiniment petit BC avec une vîtesse finie quelconque, exprimée par BC, & en vertu d'une force finie quelconque, représentée aussi par BC, il est contraint de se détourner dans la direction CD inclinée au côté BC de la quantité de l'angle infiniment petit BCM; alors on peut regarder la droite CD comme un obstacle qui s'oppose au mouvement uniforme du corps B dans sa premiere direction BC, & par conséquent la force finie BC se décompose en deux, l'une dans une direction parallèle à CD, exprimée par BN ou MC, & l'autre dans une direction perpendiculaire à CD, exprimée par BM ou NC. La force exprimée par BN qui est finie, subsiste toute entiere après le détour, & c'est en vertu de cette force seule que le corps B décrit le côté CD, en un tems égal à celui qu'il a employé à décrire le côté BC, & par conséquent CD est égale à BN; la force exprimée par NC ou BM, est un infiniment petit du premier ordre, parce qu'elle est le sinus de l'angle infiniment petit BCM, dont BC, (qui exprime une force finie) est le rayon; NC exprime la force avec laquelle le corps B agit sur le côté CD de la courbe pendant qu'il le décrit; mais cette force est totalement perdue pour la vîtesse (185)

Ainsi la vîtesse du corps B après le détour, est à la vîtesse avant le détour, comme BN, à BC. Si donc du centre B, avec le rayon BN, on décrit le petit arc N*i*, alors B*i* étant égal à BN, C*i* exprime la perte de la vîtesse causée par le détour. Or l'arc N*i* est une petite droite qui tombe de l'angle droit N, perpendiculairement sur l'hypothénuse BC du triangle rectangle BNC. Donc (Elem. 561) NC est moyen proportionnel entre CB & C*i*. Or CB est une quantité finie, & NC un infiniment-petit du premier ordre: donc (Elem. 359) C*i* est un infiniment petit du second ordre. Donc un corps qui décrit une courbe, ne perd de sa vîtesse à chaque détour, qu'une quantité infiniment petite du second ordre.

415. COROLL. Il suit de-là que *le corps* B *doit décrire une infinité de fois la courbe entière, pour perdre un degré fini de vîtesse:* car la somme de tous les infiniment petits du second ordre, ne faisant qu'un infiniment petit du premier, le corps après avoir décrit une fois la courbe entiere, n'a perdu qu'une infinité de degrés de vîtesse infiniment petits du second ordre, & par conséquent qu'un infiniment petit du premier ordre.

416. THEOREME IV. *Dans un mouvement curviligne quelconque, les écarts du mobile par rapport à une tangente, sont dans les premiers instans très courts comptés depuis le passage par le point de contact, à très-peu-près comme les quarrés de ces instants.*

DEM. I°. Soit AKH (fig. 65) un demi-cercle dont le diamètre est AH, soit la tangente AE, & deux points I, F infiniment proches du point A. En abaissant de ces points sur AE les perpendiculaires ID, FE, & sur AH les perpendiculaires IB, FC, on voit que ID ou AB, & que FE ou AC expriment les écarts des points I, F par rapport à la tangente AE. Or (Elem. 565) ÷ AB : IB : BH : & ÷ AC : FC : CH, ou à cause des quantités infiniment petites, AB, AC qui font AH = BH = CH, on a, en faisant AH = 1, ÷ AB : IB : 1 & ÷ AC : FC : 1. Donc AB = IB^2, & AC = FC^2 (Elem. 316). Donc AB : AC :: IB^2 : FC^2; ou ID : EF :: AD^2 : AE^2. Si donc on suppose

que AD, AE sont comme les tems comptés depuis le passage du mobile par le point de contact A, il est clair que les écarts ID, FE sont comme les quarrés de ces tems.

417. II°. Si le mobile ne décrit pas un cercle, mais une courbe quelconque AFG, il est clair que par les trois points infiniment proches A, I, F, on peut faire passer une circonférence de cercle AKH, (Elem. 477) & qu'alors l'arc AF de la courbe sera confondu dans cette circonférence, ce qui fera que la démonstration précédente s'y appliquera facilement.

418. Coroll. *Toute force qui altère les mouvements rectilignes, peut être considérée pendant un très-court intervalle de tems, comme une force accélératrice constante.* Car le mobile ne quitte la ligne droite selon laquelle il vient de faire un pas, que parce qu'il est détourné par une force: & comme cette force lui fait faire des écarts qui sont comme les quarrés des tems, il est clair qu'elle agit de la même manière qu'une force accélératrice constante (98).

Remarques sur le calcul des mouvements variés dans les lignes courbes.

419. Pour faire le calcul des mouvements variés dans les courbes, les Geométres expriment les rapports des tems par des abscisses d'une courbe, & les rapports des vîtesses correspondantes ou ceux des espaces parcourus pendant ces tems, par les ordonnées d'une courbe, parce qu'en y appliquant la théorie des courbes, on calcule facilement les propriétés du mouvement dont il s'agit.

Par exemple, les rapports des tems écoulés depuis le commencement du mouvement d'un corps jusqu'à tels instants qu'on voudra pris dans la durée finie de son mouvement, peuvent être représentés par les abscisses AD, AE, AF, (fig. 67) & les rapports des espaces parcourus depuis le commencement du mouvement jusqu'à la fin de chacun de ces instants, par les ordonnées correspondantes DB, EC, FG. Or dans ce cas, 1°. la ligne qui passera par les points A, B, C, G ne sera évidemment une droite que lorsque le rapport des abscisses aux ordonnées sera constant; c'est-à-dire, lorsque le mouvement sera uniforme.

420. 2°. La courbe ABCG ſera concave par rapport à la ligne des abſciſſes AF, ſi la vîteſſe du mouvement eſt retardée ; elle ſera convexe, ſi la vîteſſe eſt accélérée.

421. 3°. *La vîteſſe d'un corps mu en ligne courbe n'étant preſque jamais uniforme, on ne peut l'exprimer par des termes algébriques, que pour des inſtants infiniment petits.* Par exemple, ayant mené par E l'ordonnée EC, par C la tangente CT, puis l'ordonnée *e i* infiniment proche de EC & terminée à la tangente en *c*, enfin par C la droite C*h* parallele à AE, il eſt clair que ſi la vîteſſe du mobile avoit toujours été égale à celle qu'il a lorſqu'il parcourt l'eſpace exprimé par EC, tous les eſpaces parcourus précédemment euſſent été proportionnels aux tems : ainſi AE eût toujours été comme EC : & puiſque les eſpaces parcourus ſont repréſentés par des ordonnées, qui ſont des droites qui font toujours le même angle avec le diamétre, dont les abſciſſes marquent les temps correſpondants ; ces ordonnées au lieu d'être terminées à une courbe ABC, l'euſſent été à la droite TC (407) Donc puiſqu'on peut ſuppoſer (405) que pendant le tems infiniment petit E*e*, qui ſuit le temps AE, la vîteſſe du mobile reſte uniforme, telle qu'elle étoit à la fin de ce temps AE ; il eſt évident que *e c* doit repréſenter l'eſpace correſpondant au tems A*e*, que *h c* doit repréſenter l'eſpace parcouru uniformement pendant l'inſtant E*e* ou C*h*, qu'enfin la vîteſſe du mobile à la fin du tems AE, ou pendant l'inſtant infiniment petit ſuivant, eſt $\frac{hc}{Ch}$ (44).

422. Si on ſuppoſe que la courbe ABCG ſoit telle, qu'ayant pris ſur ſon axe AF un point quelconque D pour être l'origine des abſciſſes, un tems *t* ſoit exprimé par l'abſciſſe DE, & la vîteſſe *u* à la fin du tems *t* par l'ordonnée correſpondante EC, alors l'aire DBCED exprimera l'eſpace parcouru pendant le temps *t*. Car ſi E*e* exprime une partie infiniment petite de *t*, & *e i* la vîteſſe correſpondante, il eſt clair (49) que l'eſpace parcouru dans cet intervalle infiniment petit ſera exprimé par E*e* × *ei*, c'eſt-à-dire, par l'eſpace EC*ie* qui eſt un des Eléments

de l'aire ou de la quadrature de la courbe ; donc l'espace parcouru dans le temps entier t, est comme l'aire totale DBCED.

423. Par une même méthode, on voit que l'aire DBCED pourroit exprimer les temps, si les abscisses DE étoient directement comme les espaces parcourus, & EC réciproquement comme les vîtesses ; ce qui est clair par la formule $t = \frac{e}{u} = e \times \frac{1}{u}$. Enfin la même aire pourroit exprimer les vîtesses, si les espaces étoient représentés par DE, & la raison inverse des temps par EC, puisque $u = \frac{e}{t} = e \times \frac{1}{t}$. Mais ces deux manières de se servir de l'aire DBCED ne sont ni si commodes, ni si naturelles que la première, qui est par conséquent la plus en usage.

424. Il suit de-là que *des trois rapports, savoir, des temps, des vîtesses, des espaces, la loi de deux étant donnée, celle du troisième se trouve par l'analyse ou par la théorie des courbes.* On y employe principalement le calcul différentiel & intégral, puisque tout se réduit à déterminer la nature, les symptomes & la quadrature des courbes qui représentent les effets de ces loix.

ARTICLE II.

Du mouvement de Projection, ou du mouvement produit par une force primitivement imprimée, & par la pesanteur.

425. NOus avons déja démontré (408) que si un corps est animé de deux forces, l'une constante & l'autre accélératrice constante, il doit décrire une parabole. C'est le cas où se trouve un corps pesant que l'on jette obliquement, ou parallèlement à l'horizon. L'impulsion qu'on lui donne en le jettant, est une force constante, & sa pesanteur est une force accélératrice constante. Nous supposons ici que rien ne s'oppose à l'effet de ces deux forces

combinées ; nous verrons dans la suite ce qui empêche que les corps jettés ne décrivent réellement des paraboles.

426. Soit donc CA (fig. 66, 68, 70) la direction de la force de projection ou d'impulsion, CI celle de la pesanteur, CLM la parabole décrite, le point C s'appelle *le point de projection*, & si on suppose que le point L (fig. 70) soit le but que l'on se soit proposé d'atteindre, la droite CL s'appelle *la portée du jet* ; l'angle ACN formé par la direction CA & par la droite CN parallèle à l'horizon ou perpendiculaire à la direction CI, s'appelle *l'angle de projection*. Si CA s'éleve au-dessus de l'horizon, ou si l'angle ACI est obtus, le corps jetté va d'abord en montant jusqu'à un point S qui est le sommet de la parabole, puis il descend par la branche SLN ; & alors la droite horizontale CN comprise depuis le point de projection C, jusqu'à la rencontre de la parabole, s'appelle *l'amplitude du jet*. Si CA est parallèle à l'horizon (fig. 68) ou si l'angle ACI est droit, le corps part du sommet C de la parabole, & va toujours descendant. Enfin si CA est inclinée vers l'horizon, ou si l'angle ACI est aigu, (fig. 66) le corps descendra toujours & ne décrira qu'une branche de parabole sans sommet. Mais dans tous ces cas CI est un diamètre de la parabole.

427. *Il est évident* 1°. *que la direction de la force uniforme, ou la ligne suivant laquelle on jette un corps, est une tangente à la parabole au point de projection.* Car dans l'instant que le corps part, il ne suit ni la direction CA, ni la direction CI, & il n'y a que le point C commun à ces deux directions qui soit un point de la parabole : mais la ligne CA est par la construction parallèle aux ordonnée HK, GL, &c. donc (Elem. 773) elle est tangente à la parabole.

428. 2°. *Qu'on a le paramètre* P *du diamètre, en divisant le quarré d'une ordonnée quelconque par son abscisse* (Elem. 819). Ainsi on aura $P = \frac{CE^2}{EL}$, & réciproquement que *si un corps est poussé suivant* CE, *& si le paramètre de la parabole qu'il doit décrire est par rapport au point* C, *égal à* $\frac{CE^2}{EL}$, *la parabole passera par le point* L.

429. THEOREME I. *De quelque manière qu'un corps décrive une parabole, la force qui le pousse uniformément peut être exprimée par une ligne* CB *verticale, égale à la hauteur où il seroit monté, si cette même force l'avoit poussé perpendiculairement en haut.*

DEM. Il n'y a pas de force finie qu'un corps ne puisse acquérir en tombant librement, si on conçoit que ce corps ayant ainsi acquis la force qu'on voudra, vienne à rencontrer subitement un obstacle qui le détourne de son chemin vertical, & qui lui fasse prendre une direction inclinée à l'horizon, ce corps se trouvera alors animé de deux forces, l'une sera celle qu'il aura acquise en tombant, & qui tend à le faire aller uniformément dans cette nouvelle direction, l'autre sera sa pesanteur qui le porte vers le centre de la terre avec une vîtesse uniformément accélérée, il prendra donc une route moyenne & décrira une parabole (408). Donc de quelque manière, &c.

430. THEOREME II. *La verticale* CB (fig. 70) *qui exprime la force du jet, est le quart du paramètre* P *du diamètre* CI *commun à toutes les paraboles possibles que le corps peut décrire en vertu de cette force.*

Puisque CB exprime l'espace parcouru en vertu d'une force accélératrice constante, $CA = 2CB$ exprimera (96) l'espace parcouru uniformément en même temps avec la vîtesse du corps acquise en C par sa chûte depuis le point B. Si donc sur le diamètre CI on prend $CH = CB$, & si du point H on mene l'ordonnée MH, on aura (Elem. 862) $HM^2 = CH \times P$. Or $HM = CA = 2CB$, donc $HM^2 = 4CB^2$. Donc $4CB^2 = CH \times P$, ou $4CB^2 = CB \times P$, & en divisant par CB, $4CB = P$. Donc $CB = \frac{1}{4}P$.

431. COROLL. I. *La verticale* CB *est la distance du point* C *à la directrice de toutes les paraboles possibles parcourues avec la force du jet représentée par* CB; ou ce qui est la même chose, *si du point* B *on éleve à* CB *une perpendiculaire* BT, *elle sera la directrice de toutes ces paraboles.*

432. COROLL. II. Le point C étant commun à toutes ces paraboles, & sa distance CB à la directrice commune

devant être (Elem. 781) égale à sa distance au foyer de chacune, il suit que *si du point* C (fig. 69) *comme centre en prenant* CB *pour rayon, on décrit un cercle* F*f*Φφ, *tous les points de sa circonférence seront les foyers de toutes les paraboles possibles parcourues en vertu de la force du jet représenté par* CB.

433. THEOR. III. *La direction du jet faisant un angle avec celle de la pesanteur, le foyer de la parabole sera d'autant plus éloigné de son sommet, que la force du jet sera plus grande par rapport à celle de la pesanteur, & que l'angle formé par les directions de ces deux forces approchera plus d'être droit.*

Car puisque BT (fig. 69) est la directrice commune à toutes les paraboles qu'il est possible de faire décrire à un corps jetté en vertu de la force absolue du jet exprimée par CB, & puisque les foyers de toutes ces paraboles sont dans le cercle BF*f*, il suit évidemment que dans toutes ces paraboles, plus la direction du jet approche de CB ou CI, plus le point du cercle BF*f* où est le foyer de la parabole décrite est proche du point B. Donc alors plus ce foyer est proche de la directrice commune, & par conséquent plus il est près du sommet de la parabole. On voit de même que la parabole dont le foyer est le plus éloigné de sa directrice est celle dont la direction du jet est horizontale, puisque son foyer est en *k*, de sorte que la distance du foyer à la directrice est 2CB, & celle du foyer au sommet est CB. Donc à égales forces de jets, les foyers s'écartent d'autant plus des sommets des paraboles, que la direction du jet approche plus d'être horizontale, & parce que le rayon du cercle BF*f* est d'autant plus grand que la force absolue du jet est plus grande, il suit qu'en général le foyer est d'autant plus éloigné du sommet de la parabole, que la direction du jet approche plus d'être horizontale, & que la force du jet est plus grande.

434. PROBLEME I. *Etant données la force du jet, & la position du but, déterminer les directions du jet,* c'est-à-dire, *les angles de projection.*

Soit L (fig. 71 & 72) le but dans la ligne donnée CL: du point de projection tirez CD parallèle à l'horizon, & élevez-lui

élevez-lui la perpendiculaire CP que vous ferez égale au parametre qui est donné par la force du jet (430) : par son milieu F élevez la perpendiculaire GN, & par C sur CL la perpendiculaire CG. Du point de rencontre G décrivez avec le rayon GC un arc de cercle CNP, enfin par le but L, menez LA parallèle à CP, & par les deux points A, *a*, où elle coupe l'arc CNP, menez CA, C*a*, les angles ACD, *a*CD seront les angles demandés.

DEM. Ayant tiré PA, P*a*, les triangles PAC, CAL sont semblables ; car à cause des parallèles PC, AL l'angle PCA = CAL, & parce que CL est perpendiculaire au rayon CG, & par conséquent tangente à l'arc CNP, l'angle ACL est mesuré par la moitié de l'arc CNA (Elem. 465) aussi-bien que l'angle APC (Elem. 466) on aura donc PC : CA :: CA : AL. Donc $PC = \frac{CA^2}{AL}$. Donc (428) PC étant le parametre du diamètre qui passe par C, le jet fait suivant CA fera passer la parabole par le point donné L. On démontrera de même que le jet suivant C*a* fera passer une parabole par le même point L, parce que les triangles semblables PC*a*, C*a*L donnent $PC = \frac{Ca^2}{aL}$.

435. COROLL. I. Si la parallèle LA ne rencontroit pas l'arc CNP, le problême seroit impossible, le but seroit hors de la portée du jet, & si LA touchoit seulement cet arc, elle le toucheroit en N, & le problême n'auroit qu'une solution, le but seroit éloigné de toute la portée du jet, la direction du jet seroit CN, & elle diviseroit en deux également l'angle PCL compris entre la verticale PC & la portée du jet CL. Car comme ce cas arriveroit si le but étoit en M, les triangles PCN, CMN seroient semblables & isosceles, parce que GN divise en deux également l'arc CNP (Elem. 454) donc l'angle PCN = NCM.

436. COROLL. II. Les deux directions CA, C*a* sont également éloignées de la direction CN qui est celle de la plus grande portée du jet sur la ligne CM. Car LA

& PC étant parallèles, sont toutes deux perpendiculaires au rayon GN, les arcs AN, *a* N sont égaux, (Elem. 454) & par conséquent les angles ACN = *a*CN.

437. COROLL. III. Quand le but est de niveau avec le point de projection, (fig. 71) la plus grande portée du jet est CM ou CD. Elle est égale à la moitié du parametre CP, & l'angle de la projection NCB est de 45 degrés.

438. COROLL. IV. Dans le même cas la distance CB ou CL est comme le sinus du double de chaque angle de projection ACB, *a*C B. Car CB étant transportée parallélement à elle-même en A, est le sinus de l'arc PA ou de l'arc CNA son supplément dont la moitié mesure l'angle ACB; & étant transportée en *a*, elle est le sinus de l'arc C*a* dont la moitié mesure l'angle *a*CB (Elem. 465.).

439. PROBLEME II. *Etant donnés l'angle de projection & la position du but, déterminer à quelle hauteur montera le corps; c'est-à-dire, déterminer le sommet de la parabole qu'il doit décrire.*

Soit l'angle de projection ACB, (fig. 71 & 72) tirez l'horizontale CD, & du point *b* pris au milieu de CF abaissez sur CA la perpendiculaire indéfinie *b*O*f*, prenez, toujours de l'autre côté de AC, O*f* = O*b*, & par le point *f* faites passer la verticale HE qui coupera CA en H & CD en E. Divisez HE en deux également en S, le point S sera le sommet cherché.

DEM. La ligne AC étant (427) tangente à la parabole, elle doit être perpendiculaire & diviser en deux également la ligne *bf* qui va du point *b* de la directrice au foyer *f* de la parabole; (Elem. 808) le point *f* est donc par construction le foyer, & par conséquent *f*E est une partie de l'axe, CE est une ordonnée à l'axe, HE est la soutangente, & son milieu S est le sommet de la parabole (Elem. 827.)

440. COROLL. I. *Quand la portée du jet* CB (fig. 71) *est horizontale, la hauteur* SE $= \frac{1}{4}$ AB. Car alors l'axe est au milieu E entre les points C & B, & à cause des triangles semblables ACB, CHE, la soutangente HE est $\frac{1}{2}$ AB, & SE est $\frac{1}{4}$ AB.

441. COROLL. II. *Quand l'angle de projection est de 45 degrés, la hauteur est $\frac{1}{8}$ du parametre.* Car elle est $\frac{1}{4}$ MN qui est la moitié de PC.

442. COROLL. III. *Les hauteurs où montent les corps jettés sont comme les sinus verses du double de l'angle de leur projection.* Car ces hauteurs étant (440) comme les quarts de BA & de B*a*, sont (Elem. 297) comme ces mêmes lignes BA, B*a* : or BA, B*a* étant transportés sur le diamètre GC sont les sinus verses des arcs CA, C*a* qui sont (438) le double de la mesure de chaque angle de projection.

443. THEOREME IV. *Les tems que deux corps jettés avec la même force employent à parvenir à un même but par deux directions* CA, C*a* (fig. 71 & 72) *sont entr'eux comme les sinus des angles de projection* ACL, *a*CL.

DEM. Le tems que le corps employe à parvenir de C en L par la direction CA est égal à celui qu'il employeroit à aller uniformément de C en A, parce que ce n'est qu'en vertu de son mouvement uniforme qu'il s'avance vers L ; donc les tems employés suivant les projections CA, C*a* sont comme les lignes CA, C*a* ou comme leurs moitiés : or ces lignes sont les cordes des arcs CA, C*a* qui mesurent le double des angles de projection ACL, *a*CL, donc leurs moitiés sont les sinus de ces mêmes angles, donc les tems sont comme les sinus des angles ACL, *a*CL.

Remarques sur la Théorie précédente.

444. LA théorie des mouvemens des corps jettés obliquement qui décrivent des paraboles, a été regardée pendant long-tems par ceux qui ont écrit sur l'artillerie, comme celle des découvertes modernes, dont on pouvoit faire la plus directe & la plus heureuse application à la pratique. C'est ce qui les a engagés à entrer dans de grands détails sur cette matière, à construire des tables fort amples des angles sous lesquels il falloit diriger les canons & les mortiers, pour atteindre à un but donné, & à inventer

des instrumens propres à marquer que les piéces d'artillerie sont en effet dirigées selon ces angles. Mais ceux qui ont approfondi la théorie de la résistance que les fluides opposent aux mouvemens des corps qui les traversent, ont reconnu que la résistance de l'air à l'égard des boulets & des bombes étoit si grande, qu'il n'étoit pas possible de la négliger dans la pratique de l'artillerie, comme on avoit toujours fait, sous prétexte que les boulets & les bombes avoient un très-petit volume, en comparaison de leur surface : que cette résistance de l'air étoit cause que la courbe décrite réellement par un corps quoique fort pesant & d'un petit volume, s'éloignoit d'autant plus d'être une parabole, que la force du jet, par exemple, que la vitesse communiquée à un boulet par l'explosion de la poudre, étoit plus grande. M. Robins a fait voir, que la résistance de l'air étoit en effet si grande, principalement à la bouche des piéces, qu'un boulet de 24 livres chassé par 16 livres de poudre, éprouvoit en sortant du canon une résistance qui surpasse plus de vingt fois la pesanteur du boulet. Il a éprouvé qu'il arrive souvent que la courbe décrite par le boulet n'est pas toute dans un même plan vertical.

445. On ne peut donc fonder sur la Géométrie seule des régles sûres de pratique pour l'artillerie, & il paroît qu'il n'y a pas d'autre parti à prendre à cet égard, que de juger par l'effet & par la portée des premiers coups que l'on tire, de la manière dont il faut ajuster les piéces pour approcher le plus qu'il est possible, du but qu'on se propose d'atteindre.

446. Mais quoique la théorie des mouvemens de projection telle qu'on la donne ici, ne puisse être d'un grand usage à l'égard de l'artillerie, elle ne laisse pas d'être fort utile dans les différentes parties des sciences Physico-mathématiques. C'est elle d'ailleurs qui a conduit les Géométres du siécle passé à la théorie physique de l'Astronomie, & cette théorie est devenue une des plus belles & des plus utiles découvertes dont les modernes puissent se glorifier. Voici à peu-près comme l'idée en est venue, ou a pu venir.

447. Nous avons trouvé qu'un corps jetté près de la ſurface de la terre, décrit une parabole, parce qu'il ſe trouve animé à la fois de deux forces de différente nature, ſavoir de la force du jet, qui eſt conſtante & uniforme, & de la force de la peſanteur, qui eſt une force accélératrice, que nous avons ſuppoſé s'exercer toujours dans des droites parallèles entr'elles, & perpendiculaire à l'horiſon, ce qui fait qu'elles ne peuvent être cenſées concourir qu'à une diſtance infinie du point de projection. Or cette ſuppoſition n'eſt pas exacte, parce que la direction de la peſanteur eſt toujours dans des droites qui tendent à concourir au centre de la terre, d'où il ſuit que la vraie trajectoire d'un corps jetté près de la ſurface de la terre dans un eſpace non réſiſtant, n'eſt pas, rigoureuſement parlant, une parabole, mais que c'eſt une autre courbe concave vers le centre de la terre (409). Or la parabole & l'ellipſe ſont deux courbes du même genre, & qui ne différent entr'elles que parce que l'ellipſe a deux foyers à une diſtance finie l'un de l'autre, & que la parabole en a deux infiniment éloignés (Elem. 806), de ſorte que la parabole devient ellipſe, lorſque la diſtance de ſes foyers ne peut plus être cenſée infinie. On peut donc regarder la trajectoire des corps jettés, comme une parabole ou comme une ellipſe, ſelon que l'on ſuppoſera la diſtance de la ſurface de la terre à ſon centre, comme infinie ou comme finie. Et puiſque cette diſtance eſt réellement finie, on peut regarder la vraie trajectoire des corps jettés, comme un arc d'ellipſe, dont un des foyers eſt celui qui ſe trouve dans le cercle BF*f* (fig. 69), & l'autre eſt au centre de la terre.

448. Cela poſé, plus une force de projection horizontale ſera grande par rapport à celle de la peſanteur, (laquelle ſelon ce que nous avons dit (109), & que nous démontrerons dans la ſuite, ne peut faire décrire aux corps placés à la ſurface de la terre, qu'un eſpace de 15 pieds 1 pouce pendant la première ſeconde de tems de leur chûte libre), plus la trajectoire s'écartera de la figure pa-

rabolique, en devenant ellipse de moins en moins allongée, ou (433) plus les deux foyers se rapprocheront. Or on peut concevoir la force de projection horizontale si grande, que ces deux foyers concourent enfin au centre de la terre, auquel cas le corps jetté ne retomberoit plus sur sa surface, mais il décriroit perpétuellement un cercle autour du centre de la terre. En effet, il est aisé de calculer qu'il suffiroit pour cela que ce corps pût par sa seule force d'impulsion, parcourir environ 4048 toises à chaque seconde de tems, (c'est la distance à laquelle le vrai niveau s'abbaisse de 15 pieds 1 pouce au-dessous du niveau apparent). Car alors à chaque instant sa pesanteur le rapprocheroit de la terre, précisément autant que sa force d'impulsion horizontale l'en écarteroit.

Ce seroit la même chose, si l'on supposoit que le point de projection horizontale fût fort élevé au-dessus de la surface de la terre, pourvu que l'effet de la force de projection fût de même exactement contrebalancé par celui de la pesanteur.

449. Mais si la force de projection horizontale portoit le foyer que nous avons trouvé dans le cercle BF*f*, au-delà du centre de la terre, alors on voit que le corps décriroit perpétuellement une ellipse autour de la terre, dont le centre seroit le lieu d'un des foyers.

450. En raisonnant ainsi par analogie, il paroît qu'il se pourroit faire que la lune ne tournât autour de la terre qu'en vertu d'une force de projection, & de sa pesanteur à l'égard de la terre ; que la terre elle-même, & que les autres planétes ne tournassent autour du soleil, qu'en vertu d'une force de projection particulière à chacune, & d'une pesanteur à l'égard du soleil. C'est-là en effet le fondement de toute la théorie physique de l'Astronomie, & c'est par le moyen de cette théorie qu'on a fait des progrès si étonnans dans cette science.



ARTICLE III.

Des Mouvemens de Rotation & d'Oscillation.

451. LORSQU'UNE force eſt employée contre une maſſe quelconque, ſoit pour la mettre en mouvement, ſoit pour changer celui qu'elle a déja, la force a ordinairement deux obſtacles à vaincre, & qu'il faut bien diſtinguer, ſavoir, l'inertie des particules qui compoſent cette maſſe, & leur poids. Il eſt vrai que l'inertie & le poids des corps ſont proportionnels à la maſſe de ces corps, ou comme la ſomme des molécules égales, dont la maſſe eſt compoſée; mais l'inertie eſt une qualité invariable, inhérente à la maſſe, ou qui n'en peut jamais être ſéparée; au lieu que le poids n'eſt qu'une qualité accidentelle, dont l'effet peut être détruit en pluſieurs manières dans les mouvemens des corps, par exemple, en les ſuppoſant placés ſur des plans horizontaux parfaitement polis: d'ailleurs les poids des corps ſont variables, ſelon toutes les expériences, ils décroiſſent à meſure que les corps s'éloignent du point vers lequel la peſanteur les porte.

452. Si la force employée contre un corps, s'exerce immédiatement ſur le centre de gravité de ce corps, ou ſi la direction de cette force paſſant par le centre de gravité, s'exerce ſur une des faces (je ſuppoſe le corps parfaitement dur,) dont le plan ſoit perpendiculaire à la direction de la force, en ſorte que tout ſon effort ſe communique au centre de gravité du corps, alors cet effort doit ſe diſtribuer également dans toutes les molécules qui compoſent la maſſe du corps, ſoit qu'on ſuppoſe que ces molécules ont en même tems de l'inertie & du poids, ſoit qu'on ne leur ſuppoſe que de l'inertie. Car comme pour trouver le centre de gravité d'une quantité quelconque, on a imaginé que cette quantité étoit partagée en deux ſyſtêmes de molécules égales, que chaque centre de gravité de chacun de

ces deux systêmes étoit à chaque extrêmité d'un levier, dont le point d'appui étoit le centre commun de gravité de toute la quantité, soutenant en équilibre ces deux systêmes: il est évident qu'une force employée directement contre ce point d'appui, ne change rien à la position respective des molécules, dont la quantité est composée; qu'ainsi l'équilibre des deux systêmes autour du centre de gravité commun n'en doit pas être rompu, & qu'il n'en doit résulter qu'un mouvement commun à tout le levier, dont les extrêmités ne doivent pas prendre plus de mouvement l'une que l'autre, & doivent par conséquent être transportées parallélement à la direction que suit le point d'appui.

453. Mais si la force employée contre un corps n'agit pas dans une direction qui passe par son centre de gravité; ou si tendant réellement à ce centre, la force est obligée de s'exercer sur une face du corps posée obliquement à cette direction, ce qui décompose l'effort de cette puissance en deux autres, dont il n'y en a qu'un qui soit dirigé au centre de gravité; alors si par le centre de gravité C (fig. 73) de la masse AEBD, on abaisse sur AB direction de la force F une perpendiculaire CP, & si par FB on fait passer un plan sur lequel CP soit aussi perpendiculaire, ce plan divisera la masse AEBD en deux portions ADB, AEB, inégales tant en poids qu'en inertie: chacune de ces portions aura un centre de gravité particulier. Celle où se trouve le centre de gravité C de la masse totale, a son centre de gravité en R plus loin de FB que n'est le point C; la portion AEB a son centre de gravité en *p*. Si donc on joint *p*R, on pourra prendre cette droite pour un levier chargé à ses extrêmités de deux masses AEB, ADB, soit qu'on les regarde comme n'ayant que de l'inertie, soit qu'on leur suppose du poids & de l'inertie à la fois. La force employée contre la masse totale étant (204) la même dans tous les points de sa direction, elle sera comme une puissance appliquée en P pour faire avancer le levier *p*R dans la direction FB; & il est évident que cette puissance ne peut communiquer aux deux portions ADB, AEB

une même quantité de mouvement, ni par conséquent faire avancer également les points p, R dans une direction parallèle à FB, parce qu'il faudroit pour cela que la puissance P pût faire équilibre avec les puissances p, R; & qu'ainsi les bras de levier Pp, PR fussent en raison inverse des puissances p, R; ou que Pp fût d'autant plus long que PR, que AEB a moins de masse que ADB: ce qui ne peut être dans l'hypothése présente. Il suit de-là que la portion AEB prendra plus de mouvement que la portion ADB, en raison de leurs moments par rapport au point P: c'est-à-dire, à proportion que la masse AEB × pP sera plus petite que la masse ADB × PR.

454. Cela posé, si dans les masses ainsi choquées obliquement à leur centre de gravité, on n'a égard qu'à leur inertie, en faisant abstraction de leur poids, ou en supposant leur poids détruit par quelque cause que ce soit, l'effet de ce choc oblique sera de donner au corps choqué un mouvement de *rotation*, joint à un mouvement de *translation* uniforme, si la masse est entièrement libre; ou un mouvement de rotation ou de *conversion* autour d'un point fixe, s'il s'en trouve quelqu'un parmi ceux de cette masse. Mais s'il faut avoir égard en même tems au poids des masses choquées, alors l'effet du choc oblique sera de procurer à une masse entièrement libre, un mouvement de rotation joint à un mouvement de translation uniformément accéléré dans une parabole, comme on l'a expliqué dans l'article précédent; & si la masse a un point fixe, le choc, s'il est considérable rélativement aux circonstances, pourra procurer à cette masse un mouvement de rotation, qui sera accéléré dans tout le demi-cercle où cette masse ira en descendant, & retardé dans tout celui où elle ira en montant; puisque la pesanteur se joignant alors au mouvement imprimé par le choc & conservé par l'inertie, est une force accélératrice pour les corps qui tombent, & retardatrice pour ceux qui montent: mais si le choc est foible, il procurera à la masse par la même raison un balancement autour du point fixe; la vitesse de ce balancement qu'on appelle

alors *Oscillation*, sera aussi accélérée lorsque la masse ira en descendant, & retardée lorsqu'elle ira en montant.

Du mouvement de Rotation en général à l'égard des Corps sans pesanteur, & entièrement libres.

455. NOus n'appliquerons ce que nous avons à dire ici qu'à des verges, que nous supposerons inflexibles, d'une matière homogene, d'une figure uniforme dans toute leur longeur, & mobiles dans un milieu libre, c'est-à-dire, dans un lieu où rien ne se rencontre, qui s'oppose à leur mouvement. La théorie que nous exposerons, suffira pour les cas les plus ordinaires, & pour montrer la méthode qu'il faut suivre dans ces sortes de recherches. Cette théorie ne seroit rien moins qu'élémentaire, si on vouloit l'étendre sur toutes les espèces de corps, dont la Géométrie enseigne la nature & les propriétés.

456. Soit la verge AB (fig. 74), son centre de gravité C. Qu'elle soit frappée en P dans une direction RP perpendiculaire à sa longueur, il est évident que la force du coup étant perpendiculaire à AB, ne doit pas se décomposer ; elle doit donc se distribuer dans toutes les molécules de la verge, en tendant à donner à chacune, un mouvement dans des directions parallèles à RP. Mais comme cette force ne peut communiquer de mouvement, qu'en surmontant la résistance causée par l'inertie des molécules, & qu'à cause de l'inflexibilité de la verge, l'effet de cette résistance devient d'autant plus grand, que la molécule est plus éloignée du point de percussion; de même qu'une puissance appliquée à l'extrêmité d'un levier, a un effet d'autant plus grand à l'égard du point d'appui, que le bras de levier est plus long ; il arrive que lorsque le point de percussion P est un peu éloigné du centre de gravité C, & proche d'une des extrêmités A de la verge, l'inertie des molécules qui sont vers l'extrêmité B, les empêche de s'écarter de la position AB avec autant de vitesse qu'en ont

celles qui sont proches du point P : & qu'ainsi la droite AB prend un mouvement qui a les propriétés suivantes.

457. 1°. Le centre de gravité C de la verge AB s'avance continuellement & uniformément dans la droite CK perpendiculaire à AB ou parallèle à PR, avec une vitesse proportionnée à la quantité de mouvement que la molécule placée en C a dû prendre, eu égard à la force absolue du choc, & à la distance du point C au point de percussion P, comme on le calculera dans la suite. Le centre de gravité C étant au milieu entre A & B, sa vitesse est à très-peu près moyenne proportionnelle arithmétique entre les vitesses A *a*, B *b* des extrêmités de la verge, pendant la durée du premier instant du choc : elle est donc (Elem. 274) à très-peu près égale à la moitié de la somme des vitesses A *a*, B *b*, si les points A & B ont été transportés du même côté par rapport à la direction primitive AB ; sinon, elle est à très-peu près égale à la moitié de la différence de ces vitesses : (voyez fig. 75). On dit ici *à très-peu près*, parce qu'on va voir que, rigoureusement parlant, les espaces A *a*, B *b* ne sont pas rectilignes, mais des arcs d'une courbe.

458. 2°. Tandis que le centre de gravité de la verge s'avance le long de CK, en emportant la verge entière de AB en *a b*, cette verge s'incline de plus en plus ; & ce mouvement continuel & uniforme d'inclinaison, faisant passer la verge successivement par toutes les inclinaisons possibles, sur le plan dans lequel les mouvemens de la verge AB s'exécutent, la verge prend, après le choc, un mouvement uniforme de rotation autour de son centre de gravité. Toutes les molécules comprises entre C & A tournent donc dans un sens, & toutes celles qui sont entre C & B tournent dans le sens opposé : & les espaces qu'elles parcourent en tournant, sont en tems égaux comme les distances des molécules au centre de gravité.

459. A l'égard de la mesure de la rotation des extrêmités de la verge, elle est à très-peu près la moitié de la différence des vitesses absolues des points A & B. Car soit la

verge transportée en ab à la fin du premier instant du choc: par le centre de gravité K ayant mené EF parallèle & égale à AB, il est clair que l'angle aKE mesure le changement d'inclinaison arrivé pendant la durée de cet instant, & que cet angle étant fort petit, l'arc qui le mesure est confondu avec la droite aE, laquelle à cause des triangles semblables aEK, abD, est la moitié de aD. Or à cause des parallèles AB, bD la différence entre Aa & Bb est aD, ce qui se voit aisément dans la fig. 74, & même dans la fig. 75 en considérant que la différence entre + Aa & — Bb est (Elem. 140) Aa + Bb = aD.

460. On voit donc que le mouvement du centre de gravité C est le seul rectiligne & simple, & que celui de toutes les autres molécules, est composé de la somme ou de la différence de deux mouvemens, l'un rectiligne uniforme dont la vitesse fait parcourir en tems égaux des espaces parallèles & égaux à ceux que décrit le centre de gravité C qui emporte toute la verge, & l'autre de rotation uniforme, dont la vitesse fait parcourir des espaces proportionnels à la distance de la molécule au centre de gravité. Ainsi Aa qui exprime le mouvement du point A pendant la durée du premier instant, au commencement duquel la percussion a été faite, est composé de la somme de AE (= CK), qui mesure l'espace parcouru par le point A en vertu de son mouvement uniforme rectiligne, & de Ea qui mesure la quantité dont la verge s'est inclinée pendant son transport de AB en ab. Car à cause de la petitesse de cette inclinaison, qui est déterminée par l'angle aKE, on peut prendre la droite Ea pour l'arc qui mesure cet angle. Et Bb qui exprime le mouvement du point B dans le même tems, est égale à la différence entre FB (= CK), espace parcouru en vertu du mouvement rectiligne uniforme, & Fb qui représente l'arc qui mesure l'inclinaison FKb. Ces espaces Aa, Bb parcourus réellement par les extrêmités de la verge, résultants d'un mouvement rectiligne & d'un circulaire en même tems, sont donc, rigoureusement parlant, des arcs d'une courbe: on

l'appelle la *Cycloïde*, nous en parlerons dans la suite.

461. Puisque le mouvement absolu de chaque point de la verge AB est ainsi composé de deux mouvemens, il suit que le mouvement circulaire d'un des points de la verge comme G (fig. 75), placé entre le centre de gravité & l'extrêmité B opposée au point de percussion P, se faisant dans un sens opposé à celui du mouvement rectiligne, il peut arriver que pendant la durée des premiers instants fort courts qui suivent le choc, l'arc HG décrit en vertu de ce mouvement circulaire, soit sensiblement une droite égale, & sensiblement confondue avec l'espace rectiligne GI (= CK) décrit en vertu du mouvement rectiligne. Or dans ce cas, il est évident que ces deux mouvemens se détruisent, & que le point G doit rester sensiblement fixe en G pendant ces mêmes instans: il ne doit paroître s'en écarter sensiblement que lorsque GI, qui est le sinus de l'angle GKH, & HG qui est l'arc qni le mesure, ne peuvent plus être censés égaux & confondus.

Par la même raison, on voit que les autres molécules placées entre G & B doivent par leur mouvement circulaire décrire des espaces plus grands, que ceux qu'ils décrivent en même tems par leur mouvement rectiligne, & qu'ainsi dans les premiers instans fort courts qui suivent le choc, en n'examinant pas les mouvemens absolus de la verge, mais en comparant ses mouvemens à la position primitive AB qu'elle avoit avant le choc, la verge a dû paroître tourner sur un point fixe G, qu'on appelle *le centre spontané de rotation*, ou *le centre de conversion*. Et parce que la position de ce point est indépendante de la force du choc, mais dépend seulement de la position du point de percussion, comme on le verra bientôt; & que dans un grand nombre de cas, on a besoin de comparer ensemble, non les positions absolues d'une verge mue en vertu d'un choc reçu en un autre point que son centre de gravité, mais leurs positions rélatives à la fin d'un espace de tems fort court après le choc, nous examinerons en particulier les propriétés de cette sorte de mouvement autour d'un centre de conversion.

462. REMARQUE I. Si la verge AB n'étoit pas frappée perpendiculairement à sa longueur, mais obliquement, alors la force du choc se décomposeroit au point de percussion en deux efforts, l'un dans une direction perpendiculaire à AB, & dont l'effet seroit de tendre à donner à la verge les deux mouvemens, le circulaire & le rectiligne, comme on vient de voir; & l'autre effort seroit dans la direction de la verge. Cet effort ne tendroit donc qu'à faire avancer uniformément la verge dans le sens de sa position primitive; il n'altéreroit pas le mouvement circulaire des molécules de la verge, mais seulement leur mouvement rectiligne, de sorte que la rotation restant la même que s'il n'y eût eu que l'effort perpendiculaire, la route du centre de gravité seroit dans la diagonale d'un parallélogramme, dont CK seroit un côté, & dont l'autre côté, dirigé sur AB, seroit égal à la longueur de la ligne qui exprimeroit l'effort dans le sens de la verge.

463. REM. II. Un mouvement quelconque imprimé à la verge avant qu'elle eût reçu le choc, ne feroit que se composer avec celui que le choc feroit naître: ainsi la verge auroit toujours un mouvement de progression & un de rotation, à moins qu'un des deux mouvemens nouvellement produit ne se trouvât détruit par un mouvement égal & en sens contraire, que la verge auroit eu avant le choc.

Des mouvemens de rotation des Corps libres dans les premiers instants d'un choc, considérés rélativement à leur position avant le choc.

464. THEOREME I. *Si une verge inflexible, d'une matière homogéne, d'une figure uniforme & mobile dans un milieu libre, est frappée en un de ses points quelconques perpendiculairement à sa longueur; le produit de la distance du point de percussion au centre de gravité, par la distance du centre de conversion au même centre de gravité, est dans les premiers instants, après le coup, un douzième du quarré de la longueur de la verge.*

DEM. Le point de percussion P (fig. 77 & 78) étant différent du centre de gravité C de la verge AB, dont le centre de conversion est en G, il est clair que la vitesse avec laquelle chaque molécule de la verge tourne autour du point G, est comme sa distance à ce point, puisque l'inflexibilité de la verge fait que toutes ses parties se meuvent en même tems, & que par conséquent (45) leurs vitesses sont comme les espaces qu'elles parcourent, lesquels sont entr'eux comme les distances de ces parties au point G. D'où il suit (59) que le moment de chacune des parties de la verge à l'égard du point G, est comme le produit de la masse de ce point par sa distance au point G : c'est-à-dire, comme le produit de la masse de chaque molécule par sa distance au point B, plus ou moins la distance BG du point B au centre de conversion G, selon que le point G est au-delà (fig. 77) ou en-deçà (fig. 78) du point B. Ainsi le moment du point E est comme $E \times (EB \pm BG)$, ou comme $E \times EB \pm E \times BG$.

Or 1°. La somme des produits de chaque molécule par sa distance au point B est égale (384) au produit de la verge entière AB par la distance CB de son centre de gravité C au point B, ou à $AB \times \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} AB^2$. Si donc par le point C on mene $CT = CB$ perpendiculairement à AB, & si on acheve le triangle rectangle ABS, sa surface pourra représenter la somme de tous les produits de chaque molécule par sa distance au point B, puisque (Elem. 592) cette surface $= AB \times \frac{1}{2} AS = AB \times CT = AB \times \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} AB^2$. Ainsi supposant la masse de chaque molécule comme $E = 1$, EH (fig. 77) parallèle à CT terminée par SB, & par conséquent égale à EB, représente le produit de la molécule E par sa distance au point B.

2°. La somme des produits de la masse de chaque point de la verge AB, par $\pm BG$, est égale au produit de la verge entière par $\pm BG$: c'est-à-dire, à $AB \times \pm BG$. Si donc sur AB on éleve perpendiculairement $BK = BG$, & si l'on acheve le rectangle AK, sa surface représentera la somme des produits de AB par $\pm BG$. Or il est clair

que pout représenter AB × + BG, il faut que le rectangle AK soit placé à l'opposite du triangle SAB, comme dans la fig. 77 : & pour représenter AB × — BG ou — AB × BG, il faut que le rectangle AK soit placé du même côté que le triangle ASB, comme dans le fig. 78. Ainsi EW représente le produit de la molécule E par la distance BG : de sorte que le moment du point E par rapport à G est représenté par HW = EH ± EW.

465. Cela posé, le point de percussion P propre à déterminer le centre de rotation en G, sera évidemment dans une droite, comme LP, parallèle à CT & qui partagera la combinaison du triangle ASB & du rectangle AK, de sorte que la somme des momens des molécules de la verge AB soit égale de part & d'autre du point P : la droite LP passera donc par un point Q qui sera le point d'appui d'un levier qui joint les centres de gravité F, I du triangle ASB & du rectangle AK, puisqu'en ce point Q les effets représentés l'un par la surface de ce triangle, l'autre par celle du rectangle, sont exactement contrebalancés ou en équilibre.

Remarquez que le point Q (fig. 77) est au centre de gravité du trapeze SBKN, c'est-à-dire, dans le concours de la droite DO qui passe par le milieu des côtés opposés & parallèles BK, NS, & de la droite FI qui joint les centres de gravité du triangle & du rectangle. Dans la fig. 78. le point Q est au concours des mêmes droites DO, FI ; mais il n'est pas au centre de gravité du Polygone SABKVS.

Maintenant si par le point F on fait passer la droite FR perpendiculaire à AB, on aura par la construction AR = $\frac{1}{3}$ AB, à cause de XF = $\frac{1}{3}$ XB (355), & des triangles rectangles semblables BAX, BFR. Donc RC = AC — AR = $\frac{1}{2}$ AB — $\frac{1}{3}$ AB = $\frac{1}{6}$ AB. Mais les triangles semblables FQϒ, QIZ donnent FQ : QI :: ϒQ : QZ, puis (Elem. 557) ϒQ : QZ :: RP : PC. Donc RP : PC :: FQ : QI. Or (234) FQ : QI :: AB × BG : $\frac{1}{2}$ AB² :: BG : $\frac{1}{2}$ AB (Elem. 296) : donc RP : PC :: BG : $\frac{1}{2}$ AB, & PC ± RP : PC :: $\frac{1}{2}$ AB ± BG : $\frac{1}{2}$ AB, c'est-à-dire, RC ou $\frac{1}{6}$ AB :

$\frac{1}{2}$ AB : PC : : CG : $\frac{1}{2}$ AB. Donc enfin PC × CG $= \frac{1}{12}$ AB².

466. COROLL. I. Si le centre de conversion étoit en B, alors BG étant infiniment petit, le rectangle AK seroit infiniment étroit, son centre de gravité I tomberoit en C, le point D tomberoit en B, DO se confondroit avec BX, & ne rencontreroit FI qu'au point F; donc le point P tomberoit sur le point R, & à cause de RC $= \frac{1}{6}$ AB, le point de percussion seroit éloigné du centre de gravité de la verge de $\frac{1}{6}$ de sa longueur, ou ce qui est le même, il seroit éloigné de l'extrémité A du tiers de la longueur de la verge.

467. COROLL. II. Si la distance CG du centre de gravité au centre de conversion étoit $\frac{1}{6}$ AB, ou si on avoit BG $= \frac{1}{3}$ AB, on auroit RC : CP : : $\frac{1}{6}$ AB : $\frac{1}{2}$ AB : Or RC $= \frac{1}{6}$ AB, donc CP $= \frac{1}{2}$ AB : c'est-à-dire, qu'alors le point de percussion seroit à l'extrêmité A de la verge AB.

468. COROLL. III. *Les différentes distances des points de percussion au centre de gravité, sont toujours en raison inverse des distances des centres de conversion correspondants au centre de gravité.* Car puisque $\frac{1}{12}$ AB² est une quantité constante, on peut faire PC×CG $= 1$: donc PC $= \frac{1}{CG}$, ou CG $= \frac{1}{PC}$.

469. COROLL. IV. *La position du centre de conversion ne dépend que de celle du point de percussion, & non de la force de percussion,* laquelle n'influe que sur la vitesse des mouvemens.

470. COROLL. V. *Par une seule percussion, on ne peut amener le centre de conversion au centre de gravité*, puisqu'il n'en peut approcher plus près que $\frac{1}{6}$ de la longueur de la verge.

471. THEOREME II. *L'angle de conversion d'une verge frappée d'un seul coup comme dans le théorême précédent, est dans les instants très-courts qui suivent le choc, comme le produit de la force imprimée par la distance* PC *du point de percussion au centre de gravité de la verge :* ou ce qui revient au même, *le moment de la force imprimée rapporté au centre de gravité, est l'expression de l'angle de conversion.*

DEM. Le centre de conversion G est fixe pendant les premiers instants qui suivent le choc : le chemin CK du centre de gravité pendant ces instants étant perpendiculaire

à AB, il peut être pris pour l'arc qui mesure l'angle de conversion AG*a* : Donc l'angle de conversion AG*a* est comme CK. Or 1°. CK est d'autant plus grand que la force *f* du choc est plus grande, ou CK $= f$. 2°. CK est un arc de cercle d'un nombre de degrés d'autant plus grand, que le centre G en est plus proche, ou CK $= \frac{1}{CG}$: Mais CG $= \frac{1}{PC}$ (468). Donc CK $=$ PC. Donc en général CK $= f \times PC$: Donc l'angle AG*a* est comme $f \times PC$.

472. COROLL. *A forces égales, plus on frappe la verge près de son extrêmité, plus l'angle de conversion est grand.*

473. THEOREME. III. *A quelque distance du centre de gravité qu'une verge reçoive en même tems deux coups égaux en sens contraires, son centre de conversion est au centre de gravité.*

DEM. Soit d'abord un coup appliqué en P (fig. 76) qui tende à faire tourner la verge AB sur son centre de conversion G, & à lui donner à la fin de l'instant du choc la situation *ab*, ensorte que le centre de gravité soit transporté de C en K. Alors (471) l'angle de rotation AG*a* étant $= f \times PC$, & un arc quelconque étant toujours d'autant plus étendu qu'il mesure un plus grand angle, & qu'il a un plus grand rayon, c'est-à-dire, (16) un arc étant comme l'angle multiplié par le rayon, on a $f \times PC \times CG$ pour l'expression de l'arc CK; & à cause de $PC \times CG = \frac{1}{12} AB^2$. (465), on a CK $= f \times \frac{1}{12} AB^2$. Mais si une autre force égale *f* appliquée au point Q en sens opposé à celui du point P, tend à faire tourner la verge AB sur le point *g*, & à lui donner dans le premier instant après le choc, la position $\alpha\beta$, on voit de même que l'expression de l'angle A*g*α étant $f \times QC$, celle de l'arc CL sera $f \times QC \times Cg$, ou à cause de $QC \times Cg = \frac{1}{12} AB^2$, CL $= f \times \frac{1}{12} AB^2$. Donc puisque les forces *f* sont égales, CK $=$ CL; donc en vertu des deux chocs simultanés, égaux & opposés, le centre de gravité reste en repos, en quelque point que la verge soit frappée; donc elle ne peut tourner que sur son centre de gravité.

474. SCHOLIE. Si les forces des deux chocs ne sont pas

égales, si l'une est exprimée par f, l'autre par ϕ, le centre de gravité ne sera plus le centre de conversion, mais le centre de conversion se portera du côté où l'une des deux formules $f \times \frac{1}{12} AB^2$, $\phi \times \frac{1}{12} AB^2$ exprimera une plus grande quantité ; & alors le mouvement de ce centre est comme la différence de ces deux quantités : on voit même que si les deux coups avoient été donnés dans le même sens, le mouvement du centre de gravité auroit été comme la somme de ces deux quantités : de sorte qu'en général, *le centre de gravité d'une verge frappée de deux coups à la fois, prend un mouvement qui lui fait décrire un espace, qui est toujours comme la somme, ou comme la différence des forces des coups, selon qu'ils ont été donnés dans le même sens, ou en sens opposés ;* & comme chaque angle de conversion est (471) exprimé par le moment de la force du coup rapporté au centre de gravité de la verge, *l'angle de conversion est comme la somme, ou comme la différence des moments des coups, par rapport au centre de gravité de la verge.*

475. PROBL. *Etant données les forces* f, ϕ *de deux coups quelconques appliques en même tems en deux points différents donnés sur la verge* AB, *trouver le centre de conversion* H, (fig. 79 & 80) *dans les premiers instants après le choc.*

SOLUTION. Supposez que par l'effet de la force f, si elle eût été seule, la verge AB eût été transportée à la fin de l'instant du choc en ab, & que par l'effet de la force ϕ seule, elle eût été transportée de AB en $\alpha\beta$, ayant déterminé par ce qui a été dit ci-dessus, les centres de conversion G, D, la quantité de ces Angles, & les arcs CK, CL décrits par le centre de gravité, puis ayant pris CI = CK ± CL, selon que les coups auront été portés du même sens ou en sens opposés, vous aurez le point I pour le lieu du centre de gravité de la verge à la fin de l'instant du choc. Sur les extrêmités de ces droites prenez l'espace Aa, & portez-le de a en E, dans le même sens que a a été transporté à l'égard de A ; ou bien prenez Bβ, portez-le de b en F, dans le même sens que β a été transporté à l'égard de B : puis par le point I & par un de ces points E ou F, tirez

EF qui sera la position de la verge à la fin de l'instant du choc simultané des deux forces f, ϕ, & qui donnera en H le centre de rotation de la verge AB.

Pour calculer la position de ce point H, par le point I, menez IM parallèle à $\alpha\beta$ jusques à la rencontre de AB; & à cause des triangles rectangles semblables CMI, CLD, on a CL : CI :: CD : CM, ou (474) $\phi : f \mp \phi$ :: CD : CM $= \frac{(f \mp \phi) \times CD}{\phi}$. Or dans les triangles rectangles CMI, CHI prenant CI pour rayon, CM & CH sont les tangentes des angles CIM, CLD, CIH complémens des angles CDL, CHI. Donc CM : CH :: *Cot.* CDL : *Cot.* CHI :: *tang.* CHI : *tang.* CDL (Elem. 736). Et à cause de la petitesse de ces angles qui fait qu'ils sont confondus avec leurs tangentes, on a CM : CH :: *angle* CHI : *angle* CDL. Or (474) l'angle CHI est comme la somme $mf + \mu\phi$ ou comme la différence $mf - \mu\phi$ des moments des forces f, ϕ rapportés au centre de gravité C, & l'angle CDL est comme le moment $\mu\phi$ de la force ϕ rapportée au même centre C : Donc enfin CM : CH :: $mf \pm \mu\phi : \mu\phi$, ou $\left(\frac{f \mp \phi}{\phi}\right) \times$ CD : CH :: $mf \pm \mu\phi : \mu\phi$, & CH $= \frac{(f \mp \phi) \times CD \times \mu\phi}{\phi(mf \pm \mu\phi)}$.

476. COROLL. Si les droites ab, $\alpha\beta$ étant portées en sens contraires, la différence entre Aα & Aa, qui est AE, se trouvoit égale à CI, il est évident que EF seroit parallèle à AB, & que par conséquent il n'y auroit pas de rotation, mais que la verge iroit parallélement à elle-même, dans le sens du choc le plus fort.

477. REMARQUE. Si la verge AB (fig. 77 & 78) étoit supposée chargée d'un poids en quelqu'un de ses points : alors il faudroit ajouter le moment de ce poids à celui des points de la branche de la verge dans laquelle ce poids seroit placé, ce qui changeroit les circonstances des régles que nous venons de trouver ; mais il sera facile d'en faire l'analyse par la méthode que nous avons suivie. Nous ne pouvons entrer là-dessus dans des détails.

Du mouvement de rotation uniforme des corps autour d'un point fixe, en ne considérant que leur inertie.

478. LOrſqu'une verge inflexible & ſans peſanteur, d'une matière homogéne, & d'une figure uniforme, n'eſt mobile dans un milieu libre, que ſur un point fixe pris dans ſon axe, il eſt évident....

1°. Qu'un mouvement quelconque imprimé à cette verge, ne peut être qu'un mouvement de rotation autour de ce point fixe : & que ſi ce mouvement eſt uniforme, les eſpaces parcourus en tems égaux par les différents points de la verge, ſont comme les diſtances de ces points au point fixe.

479. 2°. Que la force imprimée par un coup ne ſe diſtribue pas dans tous les points de cette verge, de même que ſi n'ayant pas de point fixe, elle étoit abſolument libre ; parce que dans le point fixe, tout le mouvement que le coup tend à communiquer, eſt éteint par la force qui rend ce point immobile. Si cependant le point fixe étoit au centre de converſion que le coup donné à la verge lui eût procuré dans l'inſtant du coup; la force du coup ſe diſtribueroit d'abord par toute la verge, à peu-près de même que s'il n'y avoit pas de point fixe, mais dans les inſtants ſuivants cette diſtribution changeroit.

480. 3°. Que ſi avant le mouvement imprimé, on avoit ſuppoſé un corps d'une maſſe donnée, attaché à cette verge en quelqu'un de ſes points ; la force imprimée enſuite à la verge par un coup quelconque, ſe diſtribuant dans tous les points de la verge, pour vaincre leur inertie, le mouvement que prend le corps devient aſſujetti à celui de la verge, de ſorte que pendant tout le mouvement, ce corps reſſent toujours une action de la verge, qui tend à accélérer ou à retarder la viteſſe de rotation de ce corps, ſuivant les circonſtances. C'eſt pourquoi la force qui produit cette action, s'appelle la force *accélératrice* ou *retardatrice* de la verge. Réciproquement, le corps ayant par ſon inertie

une tendance à se mouvoir plus ou moins vîte que la verge, a une force accélératrice ou retardatrice à l'égard de la verge : Et la force accélératrice du corps, est égale & en sens opposé à la force retardatrice de la verge, au point où le corps y est fixé.

481. 4°. Que si on regarde la verge SA (fig. 82) comme une simple étendue en ligne droite, & par conséquent sans masse ni inertie, l'inertie du corps B qui y est fixé, est comme une puissance appliquée à un levier, dont le point d'appui est au point fixe S. L'effort f qu'il faut faire sur un point quelconque A de cette verge, pour contrebalancer l'effet de l'inertie du corps B, ou ce qui est le même, la force f que cet effort communique au point A, est à cette inertie, ou à la force p de la verge au point B où le corps B est placé, en raison réciproque de la distance de ces points au point fixe S : c'est-à-dire, $f : p :: SB : SA$. Ainsi $f = \frac{p \times SB}{SA}$.

482. THEOREME I. *Dans le mouvement de rotation d'une verge inflexible & sans pesanteur, chargée d'un corps quelconque, dans un de ses points, la force accélératrice de la verge en ce point, est comme la force de la verge dans ce même point, divisée par la masse du corps.*

Car la force de la verge en ses différents points étant différente, selon la distance de ces points au point fixe, il est évident que la verge doit communiquer à un corps libre qu'elle choqueroit, une vitesse d'autant plus grande que sa force seroit plus grande dans le point du choc, & que ce corps auroit moins d'inertie ou de masse : & par conséquent l'expression de la force accélératrice du point choquant de la verge, est la force de ce point divisée par la masse du corps choqué.

483. THEOR. II. *Une verge* SA (fig. 82) *inflexible, sans pesanteur, uniforme, homogéne, capable seulement de se mouvoir autour du point fixe* S, *& portant en* B *un corps* B *attaché à une distance quelconque* SB *du point fixe* S, *ayant reçu un coup quelconque* = p *en un point* A, *placé à une distance quelconque* SA *du même point fixe* S; *la force accélératrice*

$= f$ *qui produit une rotation uniforme dans le point* B, *est comme le moment* $p \times SA$ *du coup donné, divisé par le produit* $SB^2 \times B$ *de la masse* B *du corps, par le quarré de sa distance au point fixe*, c'est-à-dire, $f = \frac{p \times SA}{SB^2 \times B}$.

DEM. Si la force p eût été imprimée à la verge dans le point B, on eût eu (482) $\frac{p}{B}$ pour l'expression de la force accélératrice qui eût produit le mouvement du corps B, & en même tems celui de la verge. Mais parce que la force p a été imprimée à la distance SA du point fixe, on peut regarder cette force, comme une puissance p appliquée en A, à un levier SA, dont le point d'appui est en S; & la masse B, comme une autre puissance en équilibre au point B. Faisant donc (234) $SB : SA :: p : q = \frac{SA \times p}{SB}$, q exprimera l'effet que la force imprimée en A, a produit sur le corps B : donc (482) $\frac{q}{B}$ ou $\frac{SA \times p}{SB \times B}$ sera l'expression de la force accélératrice qui agit sur le corps B, pour le faire tourner autour du point S. Mais la force accélératrice fait décrire des espaces d'autant plus grand, qu'elle est plus grande; & ces espaces étant circulaires, sont des arcs d'un nombre de degrés d'autant plus grand, que le rayon en est plus petit; Donc la force accélératrice que ressent le corps B, & qui le fait tourner autour du point S, est aussi en raison inverse du rayon des arcs décrits, c'est-à-dire, comme $\frac{1}{SB}$: de sorte qu'en général (16) $f = \frac{SA \times p}{SB^2 \times B}$.

484. COROLL. I. *La force accélératrice d'un corps quelconque placé à différents points d'une même verge frappée en un même point quelconque, demeurera constante, si la masse de ce corps est en raison inverse du quarré de sa distance au point fixe*; ou ce qui est le même, *si le produit de sa masse par le quarré de sa distance au point fixe, est constant.* Car à cause des quantités constantes AS & p, la formule $f = \frac{SA \times p}{SB^2 \times B}$ devient $f = \frac{1}{SB^2 \times B}$: si donc on a $B = \frac{1}{SB^2}$, ou si $SB^2 \times B = 1$, la formule se réduira à $f = 1$.

485. COROLL. II. Si donc on fait $SA^2 : SB^2 :: B : \frac{SB^2 \times B}{SA^2}$, il suit qu'en ôtant la masse B hors de la verge, & qu'en plaçant en A une masse exprimée par $\frac{SB^2 \times B}{SA^2}$, le coup p appliqué en A fait décrire en même tems le même angle de rotation, que si le corps B n'avoit pas été remplacé par la masse posée en A.

486. COROLL. III. En généralisant cette propriété, on voit qu'*une verge* SA *chargée de tant de masses* B, C, D &c. (fig. 81) *qu'on voudra, étant frappée en* A, *de sorte que dans le premier instant du choc, l'angle de rotation soit* ASa, *la force* p *de ce coup fait le même effet sur la verge, que si ayant ôté les masse* B, C, D &c. *on avoit substitué en* A *une seule masse, exprimée par* $\frac{SB^2 \times B + SC^2 \times C + SD^2 \times D \;\&c.}{SA^2}$. Car puisqu'il faut un même coup en A, pour faire décrire dans le même tems, ou l'arc Bb à la masse B, ou l'arc Aa à une masse $= \frac{SB^2 \times B}{SA^2}$ placée en A; soit $= r$ la force de ce coup. Puisqu'il faut de même un même coup en A, pour faire décrire dans le même tems, ou l'arc Cc à la masse C, ou l'arc Aa à une masse $= \frac{SC^2 \times C}{SA^2}$ placée en A; soit $= s$ la force de ce coup. Puisqu'enfin il faut un même coup en A, pour faire décrire dans le même tems, ou l'arc Dd à la masse D, ou l'arc Aa à une masse $\frac{SD^2 \times D}{SA^2}$ placée en A, soit $= t$ la force de ce coup, &c. Il est évident que la force p appliquée en A, fait le même effet que les forces r, s, t &c. appliquées en A au même instant; donc $p = r + s + t$ &c. Donc la verge chargée en A d'une seule masse exprimée par $\frac{SB^2 \times B + SC^2 \times C + SD^2 \times D \;\&c.}{SA^2}$, & frappée du coup p, a le même mouvement de rotation, que lorsque les masses B, C, D &c. sont placées le long de la verge SA aux points B, C, D &c.

487. REMARQUE. Si à la place de SB^2, SC^2, SD^2 &c. on met Bb^2, Cc^2, Dd^2 &c. qui sont dans le même rapport, on conclura que *si des corps sans pesanteur joints ensemble par des lignes inflexibles, tournent autour d'un point fixe, la somme des produits de leurs masses par les quarrés de leurs vitesses, est constante.*

Du Mouvement d'Oscillation, ou de la rotation des Corps pesants autour d'un point fixe.

488. Nous n'avons supposé jusques ici que de l'inertie dans les corps frappés & contraints de tourner autour d'un point fixe : il nous reste à examiner la nature de la rotation, lorsque les corps frappés ont de la pesanteur, c'est-à-dire, qu'outre la force qu'ils ont acquise par le choc, ils sont continuellement animés d'une force accélératrice, qui les porte vers le centre de la terre, qui tend à convertir tous les mouvemens en chutes, enfin qui accélére les vitesses des corps qui descendent, & retarde celles des corps qui montent.

489. Le mouvement d'oscillation tel que nous le considérons ici, est un mouvement alternatif d'allée & de retour autour d'un point fixe, soit que le corps qui oscille soit attaché à ce point fixe par une verge inflexible, soit qu'il roule dans la concavité d'une courbe, qui supporte ce corps, & qui fait par conséquent le même effet, qu'un fil auquel le corps seroit suspendu.

490. On appelle *isochrones* tous les mouvemens qui se font dans une même durée de tems précisément : ainsi les oscillations de deux corps sont isochrones, lorsque dans un même intervalle de tems, ils font un nombre égal de vibrations.

491. On appelle *pendule simple* : un poids ou plutôt un point pesant P (fig. 83) attaché à l'extrêmité d'un fil inflexible sans pesanteur & sans masse, arrêté par l'autre extrémité C à un point immobile.

492. On appelle *pendule composé*, celui où plusieurs poids ou points pesants sont attachés à un fil inflexible sans sans pesanteur & sans masse.

493. Dans les pendules composés on appelle *centre d'oscillation* le point du fil où il faudroit placer un seul point pesant, de sorte qu'en supposant tous les poids supprimés, le pendule composé devint un pendule simple, mais isochrone au pendule composé.

494. Il est aisé de concevoir qu'un pendule simple étant posé dans une ligne verticale CP (fig. 83) il y doit rester en repos, parce que l'immobilité du point de suspension détruit tout l'effet de la pesanteur, à laquelle elle oppose un obstacle invincible, dans une direction verticale, qui est la même que celle de la pesanteur, mais en sens opposé: Que si par quelque coup donné au poids P ou à la verge, ou si par quelque autre manière que ce soit, le pendule a été porté jusques dans la position CA, puis abandonné à lui-même, aussi-tôt il retombera vers CP, en accélérant sa vitesse. Supposons-le en quelque point de sa route, comme en N, & que la force absolue de la pesanteur qui le pousse à chaque instant vers le centre de la terre par des impulsions égales, soit exprimée par la droite verticale NG; en menant du point G sur la tangente NI la perpendiculaire GI: & en achevant le parallélogramme IH, il est évident 1°. que la force NG peut être décomposée dans les forces NH, NI, qui sont des forces de la même nature (407) que NG. 2°. Que la force NH étant dirigée au point de suspension, qui est immobile en C, est totalement détruite par la résistance de ce point. 3°. Que la force NI, qui devient la force rélative de la pesanteur, poussera le corps vers P dans la direction NI, avec une vitesse accélérée. 4°. Qu'en représentant la pesanteur par la quantité NG, constante & constamment verticale, la force rélative NI est d'autant plus grande, & par conséquent la force NH de la pesanteur perdue par la résistance du point C, est d'autant plus petite, que l'angle NGI ou son égal GNH est plus grand: Or l'angle GNH est celui de l'inclinaison du pendule à l'égard de la verticale: Donc en mettant le pendule en mouvement, plus on l'aura écarté de la position verticale CP, plus la pesanteur aura

procuré au poids P de grands degrés de vitesse dans le sens NI de la tangente au cercle APK. Mais ensuite par le retour du pendule vers la position verticale CP, ces degrés de vitesse diminuent, (en s'ajoutant cependant toujours à ceux qui sont déja acquis, depuis que le pendule a été abandonné à lui-même), & en même tems la résistance que fait le point de suspension à l'effet de la pesanteur NG, va en augmentant; de sorte que le pendule étant arrivé (par un mouvement composé de tous les degrés acquis de vitesses, & par conséquent par un mouvement inégalement accéléré,) dans la position verticale CP, la force rélative NI de la pesanteur est devenue nulle, mais le poids par son inertie conserve tous les degrés de vitesse qu'il a acquis depuis son départ du point A: c'est pourquoi il continue sa route en remontant vers K. Or à mesure qu'il s'écarte de la verticale CP, la force rélative de la pesanteur augmente de plus en plus toujours dans la tangente, mais dans le sens *ni* opposé au sens PK, que le poids suit alors; puisque la pesanteur tend toujours à ramener le poids P vers le point le plus bas. Cette force *ni* détruit donc successivement tous les degrés de vitesse que le pendule avoit acquis depuis son départ du point A, & elle ne le laisse remonter que vers B, de sorte que les arcs PB, PA soient égaux & décrits en tems égaux. Dans le point B le poids n'ayant plus aucun degré de vitesse pour continuer d'aller vers K, se trouve abandonné à l'effort de la pesanteur, de même qu'il s'étoit trouvé en A: la pesanteur lui procure des degrés de vitesse accélérée pour descendre vers P, puis les lui ôte en remontant vers A, & ainsi de suite. On voit aussi que le pendule qui oscille sur le point fixe C, a les mêmes propriétés qu'un corps qui glisseroit en oscillant sans frottement dans la concavité du grand cercle d'une sphére, dont le rayon seroit CP; parce que le poids étant supporté par le cercle, c'est à son égard la même chose, que d'être suspendu par un fil attaché en C.

495. THEOREME I. *Si un corps descend d'un mouvement continu & libre le long de tant & de tels plans infiniment petits*

contigus HG, GF, FD (fig. 86) *inclinés comme on voudra, il aura en* D *au bas d'un de ces plans* FD, *la même vitesse que celle qu'il auroit acquise en tombant librement de* K *en* E, *qui est la hauteur du point* H *d'où il est parti, au-dessus du point* D *où il se trouve.*

DEM. Le corps étant tombé librement de H en G, a acquis la même vitesse que celle qu'il auroit acquise, s'il étoit librement descendu le long de IG (122): il est donc clair que puisqu'il ne perd de sa vitesse qu'une quantité infiniment petite du second ordre, au détour qu'il est obligé de faire pour parcourir chaque plan (414), il aura une même vitesse en arrivant en F, que s'il étoit descendu seulement le long du plan IF; donc il parcourra encore le plan FD de la même manière, que s'il étoit descendu tout de suite le long du plan KD, c'est-à-dire, (114) que s'il étoit tombé librement de K en E.

496. COROLL. I. *Si un corps descend librement le long d'une courbe quelconque, sa vitesse à un point quelconque, est égale à celle qu'il eût acquise en tombant librement d'une hauteur égale.*

497. COROLL. II. *Un corps qui descend librement le long d'une courbe, étant arrivé au point le plus bas de la courbe, est capable de remonter à la même hauteur d'où il est descendu* (103), *en décrivant l'autre branche de la courbe :* comme on l'a expliqué à l'égard du pendule simple (494), de sorte qu'un corps mis une fois en mouvement dans la concavité d'une courbe, continueroit de descendre & de remonter toujours par la même route en tems égaux & de la même manière, s'il ne perdoit de sa vitesse par le frottement dans cette courbe, & par la résistance de l'air qu'il est obligé de fendre à chaque allée & retour.

498. THEOR. II. *Les tems de la descente libre d'un corps le long de deux figures ou de deux courbes semblables & semblablement inclinées à l'horison, sont entr'eux comme les racines quarrées des dimensions homologues de ces deux figures.*

Soient ces deux figures représentées par les côtés infiniment petits HG, GF, FD, &c. *hg*, *gf*, *fd*, (fig. 86) &c. proportionnels entr'eux, & semblablement inclinés sur

l'horiſon ; le tems de la chute du corps le long de HG, eſt au tems de ſa chute le long de *hg*, comme $\sqrt{HG}$ à $\sqrt{hg}$ (99). Par la même raiſon le tems de la deſcente le long de GF, eſt au tems de la deſcente le long de *gf*, comme $\sqrt{GF}$ à $\sqrt{gf}$: or on ſuppoſe HG : *hg* :: GF : *gf*. Donc (Elem. 308) $\sqrt{HG} : \sqrt{hg} :: \sqrt{GF} : \sqrt{gf}$. Donc le tems de la deſcente le long de GF, eſt au tems de la deſcente le long de *gf*, comme $\sqrt{HG}$ à $\sqrt{hg}$. De même le tems de la deſcente le long de FD, ſera au tems de la deſcente le long de *fd*, comme $\sqrt{HG}$ à $\sqrt{hg}$ &c. Donc (Elem. 310) le tems de la deſcente le long de HG + GF + FD, eſt au tems de la deſcente le long de *hg* + *gf* + *fd*, comme $\sqrt{GH}$ à $\sqrt{hg}$: c'eſt-à-dire comme les racines quarrées de deux côtés, ou de deux dimenſions homologues quelconques.

499. COROLL. *Les corps qui gliſſent en oſcillant dans la concavité de deux Sphéres inégales, achevent leurs vibrations, c'eſt-à-dire, une allée ou un retour, en des tems qui ſont entr'eux comme les racines quarrées des arcs parcourus, ou comme celles des rayons de chaque Sphére :* parce que les Sphéres ſont des figures ſemblables (Elem. 677).

500. THEOREME III. *La viteſſe du pendule* CB (fig. 84) *arrivé en* B *dans la verticale qui paſſe par le point de ſuſpenſion* C, *eſt comme la corde* BK *de l'arc* KDB *qu'il a decrit en deſcendant depuis le point* K.

Menez KF perpendiculaire à CB, il eſt clair (495) que la vîteſſe que le pendule acquiert en décrivant l'arc KDB, eſt comme la viteſſe qu'un corps acquerroit en tombant librement de F en B, c'eſt-à-dire, (99) comme $\sqrt{FB}$; or $\sqrt{FB}$ eſt comme BK. Car (Elem. 561) ∺ BF. BK. BA. Donc (Elem. 316) $BF \times BA = BK^2$, donc à cauſe que BA eſt conſtant, BF eſt comme BK^2, & $\sqrt{BF}$ eſt comme BK : donc la viteſſe que le pendule a acquiſe en B, après avoir décrit l'arc KDB, eſt comme la corde BK de cet arc.

501. THEOREME IV. *Le nombre* N *des vibrations d'un pendule, eſt dans un tems donné, réciproquement comme la*

racine quarrée de sa longueur L, ou $N = \frac{1}{\sqrt{L}}$.

Le nombre des vibrations d'un pendule quelconque est d'autant plus grand dans un tems donné, que la durée T de chaque vibration est plus courte : donc $N = \frac{1}{T}$. Mais les durées des vibrations sont (498) comme les racines quarrées des longueurs, ou $T = \sqrt{L}$: donc $N = \frac{1}{\sqrt{L}}$.

502. COROLL. On aura donc aussi $NN = \frac{1}{L}$. D'où il suit qu'*en connoissant la longueur de deux pendules* A, B, *& le nombre des vibrations de l'un* A *pendant une heure, on trouvera le nombre des vibrations de l'autre* B *pendant le même tems ; en faisant, comme la longueur du pendule* B, *à la longueur du pendule* A, *ainsi le quarré du nombre des vibrations du pendule* A, *au quarré du nombre des vibrations du pendule* B.

503. En renversant cette proportion, on trouvera quelle doit être la longueur du pendule B, pour faire un nombre déterminé de vibrations pendant un tems donné.

504. THEOREME V. *Les pendules simples dont les longueurs* SP, S*p* (fig. 85) *sont comme les forces absolues* G, *g des pesanteurs qui les animent, sont isochrones, & réciproquement.*

DEM. Soient MN, *mn* deux arcs homologues pris dans les quarts de cercle AMP, *amp*, décrits par les oscillations des poids P, *p* animés des pesanteurs G, *g* : ayant tiré les perpendiculaires MD, *md*; NE, *ne*, à cause des arcs homologues, on a SD : *sd* :: DE : *de* :: MN : *mn* :: SP : *sp* :: G : *g*. Or par la formule $e = ptt$ (113), on voit que e ne peut être $= p$, que tt ne soit constant : C'est-à-dire, que les espaces MN, *mn* ne peuvent être comme les forces accélératrices G, *g*, que les tems ne soient égaux : donc chacun des arcs homologues de AMP, *amp* sont décrits en même tems, donc tout le quart de cercle AMP est décrit en même tems que le quart de cercle *amp* ; donc les deux pendules SP, *sp* sont isochrones.

505. COROLL. *On peut donc connoitre le rapport des pesanteurs différentes, par celui des longueurs différentes des pendules isochrones animés de ces pesanteurs.*

Des Pendules composés.

506. PROBLEME I. *Etant donnés deux poids inégaux en masse, A plus grand, B plus petit* (fig. 87), *posés à égales distances de part & d'autre du point fixe S, d'une ligne inflexible & sans masse, trouver le centre d'oscillation K de ces deux poids.*

SOLUTION. Le point A comme plus pesant doit l'emporter sur le point B, & par conséquent descendre, mais il ne le peut faire que le poids B ne monte en même tems, & qu'ainsi le mouvement de B ne s'oppose à celui de A, & n'en détruise une partie égale à tout le mouvement qu'a le corps B. Or en appellant p la force de la pesanteur, les forces des masses A & B seront $p \times A$, $p \times B$ & leurs moments $p \times A \times AS$, $p \times B \times BS$: & à cause des constantes p, AS, BS, on peut supposer que le poids B détruit une partie du mouvement du poids A, de même que si B étoit transporté en A, avec une pesanteur négative par rapport à la pesanteur de A: Donc à la place du pendule AB, on peut supposer un autre pendule SA, qu'on regardera comme un pendule composé, chargé en A de deux masses $A + B$, dont la force est $p \times A - p \times B$, & dont par conséquent (482) la force accélératrice est $\frac{p \times A - p \times B}{A + B}$. Or (504) les longueurs des pendules simples isochrones, sont comme les forces accélératrices qui les animent; On trouve donc la longueur du pendule simple SK, isochrone au pendule composé SA, en faisant $\frac{pA - pB}{A + B} : p :: SA :$ $SK = \left(\frac{A + B}{A - B}\right) \times SA$.

507. SCHOLIE. On voit par cette formule, pourquoi une balance oscille lentement sur le couteau qui porte sur l'appui suspendu, pour peu qu'on touche à l'un de ses bassins, ou à un des cordons. Car comme alors on communique un peu de force au bassin, laquelle en augmente ou diminue la force du poids selon la direction de la force

communiquée, un de ces baſſins devient un peu plus peſant que l'autre : ce baſſin ſera repréſenté par A dans notre formule, ſon bras par SA, l'autre baſſin par B, & $SA \times \left(\frac{A+B}{A-B}\right)$, qui exprime la longueur du pendule ſimple iſochrone aux balancemens des bras, fait voir que ce pendule eſt d'autant plus long, & par conſéquent les balancemens des bras d'autant plus lents, que le bras SA eſt plus long, & que la force communiquée en touchant un baſſin eſt plus petite ; parce qu'alors $\frac{A+B}{A-B}$ a une valeur d'autant plus grande, que $A-B$ eſt une quantité plus petite.

508. PROBLEME II. *Une verge* SA (*fig.* 88) *mobile ſur le point* S, *étant chargée des poids ou points peſants* B, C, D, *trouver le centre d'oſcillation* K.

SOLUTION. Si en un point A pris à volonté ſur la verge, on ſuppoſe une maſſe $= \frac{SB^2 \times B + SC^2 \times C + SD^2 \times D}{SA^2}$, cette maſſe aura (486) une force accélératrice pour faire tourner la verge SA ſur le point fixe S, équivalente à la force compoſée des forces accélératrices des maſſes B, C, D. Or en appellant p la peſanteur qui anime les maſſes B, C, D, il eſt évident qu'il y auroit au point A une force égale à la ſomme des forces des maſſes B, C, D, pour faire tourner la verge. Ainſi à cauſe de la maſſe B, il y auroit en A une force $= \frac{p \times B \times SB}{SA}$ (481) : à cauſe de la maſſe C, il y auroit en A une force $= \frac{p \times C \times SC}{SA}$: à cauſe de la maſſe D, il y auroit en A une force $= \frac{p \times D \times SD}{SA}$: donc il y auroit en A une force totale $= p \times \left(\frac{SB \times B + SC \times C + SD \times D}{SA}\right)$ & l'on trouveroit (482) l'expreſſion de la force accélératrice qui animeroit le corps A, en diviſant cette force par la maſſe en A, laquelle eſt $\frac{SB^2 \times B + SC^2 \times C + SD^2 \times D}{SA^2}$; on auroit donc

$p \times SA \times$

$\frac{p \times SA \times (SB \times B + SC \times C + SD \times D)}{SB^2 \times B + SC^2 \times C + SD^2 \times D}$, & par conséquent en disant, comme cette force accélératrice, est à la force de la pesanteur p : Ainsi SA est à SK, on trouve SK $= \frac{SB^2 \times B + SC^2 \times C + SD^2 \times D}{SB \times B + SC \times C + SD \times D}$.

509. SCHOLIE. Si l'un des poids comme C (fig. 89) se trouvoit au-delà du point S, alors on prendroit $Sc = SC$, & en supposant en c une masse égale à la masse C, mais animée d'une pesanteur négative, ou trouveroit, en faisant le calcul selon la méthode précédente, qu'il n'y a que le terme $SC \times C$ dans le dénominateur qui devient négatif. Il en est ainsi des autres corps qui pourroient être au-delà du point de suspension S.

510. COROLL. Si on supposoit égaux tous les poids B, C, D &c. alors en les faisant chacun $= 1$, on auroit $SK = \frac{SB^2 + SC^2 + SD^2}{SB + SC + SD}$. D'où il est aisé de conclure, que si SD est une verge pesante inflexible, d'une matière homogéne & d'une figure uniforme suspendue en son extrêmité S, la distance SK de son centre d'oscillation K au point de suspension, seroit représentée par la suite infinie des secondes puissances des nombres naturels, divisée par la suite infinie de leurs premières puissances, & par conséquent (Elem. 383) SK seroit égal à $\frac{1}{3}$ SD^3 divisé par $\frac{1}{2}$ SD^2, parce que SD représenteroit la dernière des distances du point S aux points successifs, qui composent la longueur de l'axe de la verge : donc $SK = \frac{2}{3}$ SD. Ce qui fait voir que *dans une verge homogéne & uniforme, le point de percussion est le même que le centre d'oscillation ; & le point de suspension est le même que le centre de conversion.*

511. Cette identité des centres de percussion & d'oscillation a lieu dans presque tous les cas, surtout lorsque les mouvemens se font dans des milieux également libres ; mais nous ne pouvons entrer là-dessus dans aucun détail. Il suffira de remarquer comme une régle générale : Qu'*une verge chargée de tant de poids que l'on voudra, étant mise en*

mouvement autour d'un point fixe, elle exerce sur les corps qu'elle rencontre, sa plus grande action possible, lorsque le choc se fait à son centre d'oscillation, parce qu'en ce point la force du choc est la même que s'il y avoit une seule masse égale à la somme de toutes celles dont la verge est chargée, ou encore parce que ce point est le point d'appui d'un levier chargé de tous ces poids, & dont la longueur se compte entre les deux poids extrêmes. Car soit le pendule SA (fig. 82) composé des poids A & B, dont le centre d'oscillation est en K, je dis 1°. que le point K est le point d'appui des poids A & B, dont le levier AB est chargé. Car puisque les poids A, B tournent ensemble antour du point S, leurs vitesses sont comme leurs distances SA, SB, & leurs forces ou moments rapportés au point S comme $SA \times A$, $SB \times B$. Or puisque (508) $SK = \frac{SA^2 \times A + SB^2 \times B}{SA \times A + SB \times B}$, on a $KB = \frac{SA^2 \times A + SB^2 \times B}{SA \times A + SB \times B} - SB$, & $KA = SA - \frac{SA^2 \times A - SB^2 \times B}{SA \times A + SB \times B}$: mettant en fraction & réduisant, $KB = \frac{SA^2 \times A - SA \times SB \times A}{SA \times A + SB \times B}$, & $KA = \frac{SA \times SB \times B - SB^2 \times B}{SA \times A + SB \times B}$, si donc le point K est le point d'appui du levier, dont l'un des bras KB, soutenant la force du poids B, laquelle est $SB \times B$, garde l'équilibre avec le bras KA, qui soutient la force du poids A, laquelle est $SA \times A$; il faut (335) que le moment $KB \times SB \times B$ soit égal au moment $KA \times SA \times A$. Substituant à KB, KA leurs valeurs, on trouve que les deux moments se réduisent également à $\frac{SA^2 \times A \times SB \times B - SA \times A \times SB^2 \times B}{SA \times A + SB \times B}$. 2°. Comme il est évident que le point d'appui K du levier AB, est le point où les efforts de toutes les puissances appliquées au levier sont soutenus, il suit que c'est le point capable du plus grand choc, de quelque façon que ce levier soit mis en mouvement.

512. COROLL. II. Si on regarde tous les espaces compris entre chacune des doubles ordonnées consécutives infiniment proches, qui remplissent l'aire d'une courbe ABμ (fig. 48) depuis le sommet A jusqu'à

$B\mu$, comme autant de petits poids, dont les centres de gravité sont les points consécutifs de l'axe $A\pi$; comme si l'espace MNmn représentoit le poids C du n°. 508, on auroit $\frac{SC^2 \times C}{SC \times C} = \frac{AP^2 \times MN \times Pp}{AP \times MN \times Pp}$ ou en faisant $MN = 2y, AP = x, Pp = dx$; on auroit $\frac{2yxxdx}{2yxdx} = \frac{yxxdx}{yx.dx}$, & la somme de toutes les expressions semblables des poids ou espaces qui rempliroient l'aire de la courbe, seroit $\frac{\int yxxdx}{\int yxdx}$, formule dont l'intégrale, faite après qu'on aura substitué à y sa valeur en x, déduite de l'Equation à la courbe, donnera la longueur AQ du pendule simple, isochrone à la courbe qui oscilleroit sur le point de suspension A; ainsi le point Q seroit le centre d'oscillation de la courbe. Comme si la courbe $BA\mu$ étoit une parabole, à cause de $yy = x$, on a $y = x^{\frac{1}{2}}$, & par conséquent $\int yx^2 dx = \int x^{\frac{5}{2}} dx$, & $\int yx d = \int x^{\frac{3}{2}} dx$: l'intégrale de $\int x^{\frac{5}{2}} dx$ est (Elem. 961) $\frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}}$: celle de $\int x^{\frac{3}{2}} dx$ est $\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}}$: divisant la première par la seconde, on a $\frac{10}{14} x^{\frac{2}{2}} = \frac{5}{7} x$. Si donc $A\pi = x$, la distance du sommet A au centre d'oscillation Q, ou $AQ = \frac{5}{7} A\pi$.

513. De ces deux corollaires, il suit 1°. Que la théorie des centres d'oscillations dans les pendules composés est susceptible de recherches aussi étendues qu'utiles, qui sont même absolument nécessaires dans les calculs des effets des mouvemens des corps assujettis à tourner autour d'un point fixe ou mobile, puisque tout l'effort de ces corps sur ceux qu'ils rencontrent se trouve réuni à leur centre de percussion. 2°. Que comme les différents corps ainsi mus & choquants peuvent être censés réduits à différents plans, à différentes figures, ou à différents polyhédres, &c. suspendus ou attachés à un de leurs points quelconque, pris en dedans ou en dehors, autour duquel ils oscillent, la recherche de leurs centres d'oscillation & de percussion, ne peut guères se faire que par le Calcul intégral. C'est pourquoi nous nous contenterons ici d'en avoir démontré la formule générale, & indiqué la méthode de s'en servir.

514. PROBLEME III. *Une verge* SA (fig. 90) *pesante, d'une matière homogéne, d'une figure uniforme, & mobile sur l'extrêmité fixe* S, *étant chargée vers l'autre extrêmité d'un poids*

A dont le rapport avec le poids de la verge est donné, trouver le centre d'oscillation K.

La solution de ce Problême se tire aisément de la formule $SK = \frac{SA^2 \times A + SB^2 \times B}{SA \times A + SB \times B}$, où il faut supposer que B exprime le poids de la verge, & que $SB = \frac{2}{3} SA$, parce que le centre d'oscillation de la verge en particulier est aux deux tiers de sa longueur, après quoi le reste est facile. Soit $SA = 1$, donc $SB = \frac{2}{3}$; soit $B = \frac{1}{10} A$, on trouve $SK = \frac{141}{144} = \frac{47}{48}$. Si on veut une formule particulière pour la solution de ce problême, qui a lieu dans tous les pendules simples qu'on peut construire, puisqu'on ne peut trouver dans la nature de verge inflexible sans pesanteur, en appellant $\frac{A}{n}$ le poids de cette verge, on trouvera $SK = \frac{9n \times SA + 4 SA}{9n + 6}$.

Du mouvement du Pendule simple dans la Cycloïde.

Origine & propriétés de la Cycloïde.

515. SI sur la droite AB (fig. 93) on fait rouler un cercle ATV qui la touche au point A, ce point A en faisant un tour entier décrira par un mouvement composé du rectiligne & du circulaire, une courbe ACEB. On l'appelle *la Cycloïde, la Roulette, la Trochoïde.* La droite AB s'appelle *la Base*, & il est évident que sa longueur est égale à la circonférence du cercle roulant ATV. La perpendiculaire FE à son point de milieu F, s'appelle *l'axe*, le point E *le sommet*, le cercle ATV, ou DCH, ou FGE, qui est le même dans des situations différentes, s'appelle *le cercle générateur.*

516. Le Cercle générateur roulant uniformément sur AB, il est évident qu'en vertu de cela seul, son centre doit décrire uniformément une droite YZ parallèle & égale à AB qui passe par le milieu entre E & F. Mais si indépendamment de ce mouvement, le centre avoit reçu d'ail-

leurs un mouvement particulier dans le ſens AB, ou dans le ſens oppoſé ; alors il eſt clair que YZ ſeroit égale à la ſomme ou à la différence de ces deux mouvemens du centre, & que chaque point de la circonférence du cercle générateur en venant paſſer à ſon tour ſur AB, y gliſſeroit en vertu de ce mouvement particulier du centre, qui entraîneroit toutes les parties du cercle à la fois dans le même ſens, ce qui feroit que la baſe AB de la cycloïde ſeroit plus longue ou plus petite que la circonférence du cercle générateur, & que la cycloïde ſeroit alors une cycloïde *allongée* ou *accourcie*.

517. Si on ſuppoſoit encore que le cercle générateur roulat non ſur une droite, mais ſur la circonférence d'un cercle, la courbe s'appelleroit une *Epicycloïde ſphérique ſimple, allongée ou accourcie*, ſelon que le centre du cercle générateur, auroit un mouvement particulier, ou nul, ou dans le ſens ſelon lequel le cercle roule, ou dans un ſens oppoſé.

518. D'où l'on voit en général, qu'*un point qui tourne autour d'un centre, lequel eſt emporté lui-même par quelque mouvement, décrit une courbe du genre des cycloïdes*. Mais quoique les propriétés des cycloïdes & des épicycloïdes ſoient d'un grand uſage dans la Mécanique, nous ne parlerons ici que de la cycloïde ſimple.

519. LEMME I. *Si d'un point quelconque* C *de la cycloïde, on mene* CL *parallèle à la baſe* AB, *& qui coupe en* G *le cercle générateur* FGE *décrit ſur l'axe* FE, *l'arc de cercle* EG *ſera égal à la droite* CG, *& ſa corde* EG *ſera parallèle à* CH *tangente à la cycloïde au point* C.

DEM. La demi circonférence du cercle générateur eſt $= \frac{1}{2}$ AB = AF. Or l'arc CD = AD ; donc l'arc CH = GE = DF = IK = CG = HE Maintenant l'arc infiniment petit de la cycloïde au point C eſt formé par le bout C de la corde CD qui tourne ſur le point D : donc (Elem. 461) CH perpendiculaire à CD eſt une tangente à cet arc infiniment petit, & par conſéquent à la cycloïde au point C. Et à cauſe des arcs égaux CH, GE, leurs

cordes CH, GE, font égales, & forment avec les droites parallèles & égales HE, CG un parallélogramme CHEG. Donc CH eft parallèle à EG.

520. COROLL. *Pour mener une tangente à un point quelconque* C *de la cycloïde, il faut mener* CK *parallèle à la bafe* AB, *qui coupe en* G *le cercle générateur décrit fur l'axe: & ayant tiré la corde* GE, *il faut du point* C *lui mener la parallèle* CH, *qui fera la tangente demandée.*

521. LEMME II. *La corde* EM *de l'arc du cercle générateur interceptée entre le fommet* E *de la cycloïde & de la droite* LK *menée par le point* M *parallèlement à la bafe* BA, *eft la moitié de l'arc* EL *de la cycloïde.*

Menez SQ parallèle & infiniment proche de LK qui coupe le cercle générateur en R, la corde prolongée en P; joignez ER; du centre E avec le rayon ER décrivez l'arc infiniment petit RO, qui fera une droite perpendiculaire fur MP. Par les points E, M du cercle, menez-lui les tangentes EN, MN; & par le point L, menez LX tangente à la cycloïde. Les triangles EMN, MRP font femblables: (Elem. 569) car la tangente au point E eft perpendiculaire à l'axe EF, & parallèle aux droites BF, LK, SQ; d'où il fuit que l'angle ENM = MRP. L'arc infiniment petit RM eft confondu avec la tangente MN, donc l'angle RMP eft oppofé au fommet & égal à l'angle EMN. Or (Elem. 545) EN = NM; donc RP = RM; donc, à caufe de la perpendiculaire RO, MO = $\frac{1}{2}$ MP. (Elem. 500) Mais MO eft l'élément infiniment petit dont la corde EM varie, & MP eft l'élément donc l'arc EL de la Cycloïde varie en même-tems: car comme (519) EM eft parallèle à la tangente LX, l'arc infiniment petit LS eft égal à la droite infiniment petite MP. Donc la corde EM ne varie que de la moitié de ce dont l'arc de la Cycloïde varie en même temps, donc la corde entiere n'eft que la moitié de l'arc de la Cycloïde.

522. COROLL. *Le contour de la Cycloïde eft quadruple du diamètre de fon cercle générateur.*

523. PROBLEME. *Faire enforte que le poids d'un pendule fimple décrive une Cycloïde donnée.*

Soit donnée la Cycloïde AVB (fig. 92) décrite ſur la baſe AB. Prolongez ſon axe VD en C, de ſorte que DC = DV, & par C menez EF parallèle à AB, faites CE = CF = AD = DB : ſur CE, CF, ſoient ſuppoſées décrites deux demi-Cycloïdes CTA, CtB dont les axes ſoient EA, FB égales à CD ou à DV, & dont par conſéquent les ſommets A, B touchent la baſe AB de la Cycloïde AVB aux points A & B. Ayant pris le point C pour le point de ſuſpenſion, attachez un point peſant P à un fil égal à CV, & parfaitement flexible : faites faire à ce poids P des vibrations dans le plan de ces Cycloïdes, enſorte que le fil ſe ploye par ſa partie ſupérieure ſur chaque demi-Cycloïde comme en CT, & que l'autre bout TP de ce fil reſte en ligne droite, je dis qu'à chaque vibration le poids P ſera toujours dans la Cycloïde AVB.

DEM. Sur les axes EA, DV décrivez les cercles générateurs EGA, DHV, menez TG, PH parallèles à la baſe AB, & joignez AG, DH ; la demi-Cycloïde ATC = 2AE (521) = CV = CTP, donc l'arc TA de la Cycloïde eſt égal au reſte TP du fil qui touche la Cycloïde en T. Donc puiſque GA eſt parallèle & égale à TK (519), & que 2GA on 2TK = TA = TP, on a TK = KP, & les parallèles TG, PH, ſont également éloignées de la baſe AB. Donc (Elem. 456) les arcs GA, HD des demi-cercles générateurs ſont égaux entr'eux, & leurs cordes GA, HD ſont égales entr'elles & à KP ; donc ces trois droites égales GA, PK, HD étant compriſes entre les parallèles également éloignées GT, AD, PH ſont auſſi parallèles entr'elles : Donc HDKP eſt un Parallélogramme, & DK = HP : donc la droite AK étant égale à GT ou (519) à l'arc AG ou DH, on a HP ou DK égal à l'arc reſtant VH. Donc (519) le point P eſt dans la Cycloïde donnée AVB.

524. THEOR. I. *Si l'axe* DV *de la Cycloïde eſt perpendiculaire à l'horiſon, & ſi le pendule en oſcillant s'avance juſqu'à un point quelconque* L : *ſa viteſſe en un point quelconque* M, *eſt comme* $\sqrt{VL^2 - VM^2}$; *ou ſi l'arc* VNL *de la Cycloïde eſt*

supposé redressé dans une droite VL, *les arcs* VM, VN *étant redressés dans la même droite en* VM, VN : *si ensuite on fait de* VL *le rayon d'un demi cercle* PZL ; *la vitesse au point* M *de la Cycloïde, est comme le sinus* MX.

Des points L, M, menez sur l'axe DV les perpendiculaires LR, MS qui rencontrent le demi-cercle générateur DOV aux points O, Q. Tirez OV, QV. Il est clair (496) que la vitesse du pendule en M acquise en décrivant l'arc LM, est égale à celle d'un corps qui seroit tombé de R en S : c'est-à-dire, que la vitesse en M est comme $\sqrt{RS}$, ou que son quarré est comme RS, ou comme RV — SV. Or (Elem. 296) RV — SV est comme $RV \times VD - SV \times VD$. Et à cause des perpendiculaires OR, QS, (Elem. 561) $RV \times VD = VO^2$, & $SV \times VD = VQ^2$. Donc RV — SV est comme $VO^2 - VQ^2$. Or (521) $VO = \frac{1}{2} VL$, & $VQ = \frac{1}{2} VM$, donc $VO^2 = \frac{1}{4} VL^2$, & $VQ^2 = \frac{1}{4} VM^2$: Donc $VO^2 - VQ^2 = \frac{1}{4} VL^2 - \frac{1}{4} VM^2$: ôtant les constantes, $VO^2 - VQ^2$ est comme $VL^2 - VM^2$; donc RV — SV ou RS, ou le quarré de la vitesse en M, est comme $VL^2 - VM^2$: Donc la vitesse en M est comme $\sqrt{VL^2 - VM^2}$,

Mais à cause du rayon VL ou VX égal à l'arc VML, dans le triangle rectangle VXM, on a VX^2 ou $VL^2 = VM^2 + MX^2$ (Elem. 562) donc $MX = \sqrt{VL^2 - VM^2}$; donc la vitesse en M est comme MX.

525. THEOREME II. *Les mêmes choses étant posées comme ci-dessus, si un corps tournoit autour du point* V *dans le demi-cercle* LZP, *en sorte que sa vitesse fût uniforme & égale à celle que le Pendule* CP *a acquise en* V *après avoir descendu du point* L : *je dis que ce corps décriroit un arc quelconque* XY *compris entre les sinus* MX, NY, *dans le même tems que le pendule* CP *ayant commencé sa vibration au point* L, *décriroit l'arc* NM *de la Cycloïde, & que par conséquent le tems que le pendule employe à décrire l'arc de Cycloïde* MN *est comme l'arc de cercle* XY.

DEM. Prenez sur la Cycloïde un arc M*m* infiniment-petit, & sur le rayon VL sa partie égale M*m* : tirez du

point m le Sinus mx infiniment proche du Sinus MX, & par X menez Xr parallèle à Mm. La viteſſe Mm dans la Cycloïde eſt (524) comme mx ou comme MX, (les viteſſes étant uniformes dans des arcs & des tems infiniment petits,) & on a ſuppoſé que la viteſſe dans le cercle PZL étoit uniforme, & comme VZ ou comme VX. Or à cauſe des triangles ſemblables MXV, rXx on a Xx : Xr ou Mm :: VZ ou VX : MX; donc les petits arcs Xx, Mm ſont entr'eux comme les viteſſes avec leſquelles ils ſont parcourus; Donc (57) ils ſont parcourus en même tems; donc l'arc de Cycloïde MN eſt décrit en même-tems que l'arc de cercle XY. Or à cauſe du mouvement uniforme dans le cercle, les tems ſont comme les arcs parcourus (56). Donc le tems que le Pendule employe à décrire l'arc MN de la Cycloïde en oſcillant librement depuis L, ou celui qu'un corps qui tourne autour du point V employe à décrire l'arc XY avec la viteſſe que le Pendule a acquiſe en V, eſt comme l'arc de cercle XY.

526. THEOREME III. *Le tems d'une vibration quelconque dans une Cycloïde, eſt au tems de la chûte libre d'un corps le long de l'axe de cette Cycloïde, comme la circonférence d'un cercle eſt à ſon diamètre; ou comme 355 à 113.*

DEM. Le tems employé par un corps à parcourir le demi-cercle LZP avec toute la viteſſe VZ, eſt au tems que le même corps employeroit à parcourir uniformément & avec la même viteſſe le rayon VL, comme LZP eſt à VL, ou comme la circonférence d'un cercle eſt à ſon diamètre. Or le tems employé à parcourir le demi-cercle LZP avec la viteſſe VZ eſt (525) égal au tems employé par le pendule à décrire l'arc de Cycloïde LVP; & le tems employé par un corps à parcourir uniformément le rayon VL avec la viteſſe VZ, eſt égal au tems de la chûte libre d'un corps le long de l'axe DV de la Cycloïde. Car le rayon VL étant égal à l'arc LMV qui eſt double de la corde OV (521); tandis que le rayon VL feroit parcouru uniformément, ſa moitié qui eſt la corde OV, ſeroit parcourue par un mouvement uniformément accé-

léré (96) : or (118) le tems de la descente d'un corps le long d'une corde quelconque d'un cercle, est égal au tems de sa chûte libre le long du diamètre de ce cercle. Donc le tems employé à parcourir uniformément le rayon VL avec la vitesse VZ, est égal à celui de la chute libre d'un corps le long de l'axe DV de la Cycloïde. Donc le tems employé par le Pendule à décrire l'arc de Cycloïde LVP, est au tems de la chûte libre d'un corps le long de l'axe de la Cycloïde, comme la circonférence d'un cercle est à son diamètre, ou environ comme 355 à 113 (Elem. 615).

527. COROLLAIRE. *Donc les tems des vibrations d'un même Pendule dans une même Cycloïde sont égaux entr'eux : ou les vibrations d'un même Pendule dans la même Cycloïde sont toujours isochrones, quelque grande ou quelque petite étendue qu'elles ayent, ou,* ce qui est le même, *en quelque point de la Cycloïde que le pendule commence sa vibration.*

Application & usages de toute la Théorie précédente.

528. Galilée a découvert le premier la véritable Théorie de la chûte des Corps, il en conclut aussi l'égalité & l'isochronisme des oscillations du Pendule simple, & fit voir son utilité pour mesurer exactement le tems. M. Huygens appliqua depuis le Pendule aux Horloges à roues vers l'an 1657, il calcula quel étoit le nombre le plus avantageux de roues, le nombre des dents de chaque roue, & de chaque pignon, propre à faire que l'effort d'un poids appliqué au tambour de la dernière roue, ne poussât le Pendule attaché à l'axe de la première roue, que de seconde en seconde de tems, c'est-à-dire 60 fois par minute. Il détermina ensuite, par expérience, quelle étoit la longueur nécessaire à un Pendule simple, pour faire précisément une vibration par chaque seconde, & il la détermina de 3 pieds 8 lignes $\frac{1}{2}$ du pied de Roi: par ce moyen il construisit les Horloges appellées *Horloges à Pendule*, qui nous font connoitre le tems avec une précision, que les Anciens n'auroient jamais osé espérer.

529. Il est certain que sans la résistance de l'air & le frottement de la verge ou la roideur du fil au point de suspension, un Pendule simple mis une fois en mouvement, devroit continuer d'y être perpétuellement, & de décrire toujours les mêmes arcs en même-tems. Mais la résistance de l'air que le poids & la verge du pendule sont obligés de fendre à chaque vibration, lui faisant diminuer insensiblement ces arcs, fait aussi diminuer le tems qu'il employe à les décrire : de sorte qu'après un certain tems un Pendule mis en mouvement & qui décri-

voit d'abord des arcs de 20 ou 30 d. de part & d'autre de la verticale, en décrit ensuite de plus petits; la somme de ses oscillations pendant la première heure, est moindre que celle de l'heure suivante, & quoique la différence soit très-petite, elle mérite cependant qu'on y remédie, s'il est possible, à cause de l'importance qu'il y a de connoitre exactement le tems, sur-tout pour les Observations Astronomiques.

530. Quoique le poids appliqué aux Horloges à pendule dût par l'action continuelle de sa pesanteur empêcher que les oscillations du pendule ne vinssent à se rallentir, cependant comme il arrivoit par différentes circonstances que l'action de cette pesanteur n'étoit pas égale, ni le jeu des piéces de l'horloge toujours également libre, qu'enfin l'étendue des oscillations d'un pendule pouvoit être alterée par un grand nombre d'autres causes physiques, on a cherché les moyens d'obvier à tous ces inconvéniens, & de rendre parfaitement isochrones toutes les vibrations d'un même pendule de quelque étendue qu'elles fussent. M. Huygens y parvint, ayant découvert qu'un même pendule qui oscilleroit dans une Cycloïde y feroit ses vibrations en tems égaux, quelqu'inégaux que fussent d'ailleurs les arcs décrits : il appliqua donc la Cycloïde au Pendule, avec cette différence qu'au lieu de faire ces Cycloïdes égales à toute la longueur du Pendule comme nous l'avons fait, il se contenta de mettre aux deux côtés du point de suspension deux petites lames courbées en arcs de Cycloïde, parce qu'il suffit que le fil du Pendule se ploye sur une partie de chaque Cycloïde.

531. Cette correction qui est en effet très ingénieuse, fut dans son tems généralement reçue & applaudie; cependant on ne l'employe plus à présent, 1°. à cause de la difficulté de courber exactement des lames en arcs de Cycloïde; 2°. parce qu'on a trouvé la manière de construire des Echappemens qui n'ont pas de frottement sensible; 3°. parce que l'expérience a fait voir que le Pendule qui décrit de petits arcs de cercle de 2 ou 3 degrés de part & d'autre de la verticale, les décrit en tems assez exactement égaux. On peut s'en convaincre en faisant réflexion que la courbure de la Cycloïde vers V, (fig. 92) est très-sensiblement égale à celle d'un cercle dont le rayon seroit CV : donc s'il y a isochronisme dans tous les arcs de la Cycloïde, il doit être aussi dans l'arc de cercle qui se trouve vers V. Et c'est là une des connoissances que la Cycloïde nous a procurée.

532. La Théorie du mouvement dans la Cycloïde a fourni à M. Huygens un moyen de calculer, plus exactement qu'on n'auroit pu déterminer immédiatement par expérience, quel est l'espace parcouru par un corps pesant dans la première seconde de sa chûte libre. On peut déterminer par expérience, & par des observations astronomiques, quelle doit être la longueur du fil CV, afin qu'il fasse dans la Cycloïde, ou dans un petit arc de cercle, une vibration en une seconde de tems précisément ; on ne doit pas se tromper de $\frac{1}{10}$ de ligne dans cette détermination, si l'on y donne toutes les attentions nécessaires. M. Huygens & M. Picard l'avoient trouvée, comme j'ai dit, de 3 pieds 8 lignes $\frac{1}{2}$ ou de 440,5 lignes; & M. de Mairan recommençant ces expériences en

1735 avec tout le soin imaginable, l'a trouvée de 440, 57 lignes: Donc (526) comme 355 à 113, ainsi 1 seconde ou 60 tierces de tems d'une vibration dans la Cycloïde, sont à 19 tierces $\frac{35}{355}$ tems de la chûte libre d'un Corps le long de l'axe DV de la Cycloïde, c'est-à-dire, à descendre de la moitié de CV, ou de 220,285 lignes. Or dans les chûtes libres, les espaces étant comme les quarrés des tems (99), le quarré de 19 $\frac{35}{355}$ est à 220, 285 lignes, comme le quarré de 60 tierces est à 2174, 128 lignes, espace parcouru par une chûte libre dans les 60 premières tierces, ou dans la première seconde de la chûte. Cet espace réduit en pieds est de 15 pieds 1 pouce 2 lignes, & un peu plus.

533. On peut encore conclure de cette Théorie, qu'on a un moyen sûr de conserver les mesures des longueurs, comme les pieds, les toises, &c. dans un pays où l'on aura déterminé exactement celle du pendule simple; & que si la longueur du pendule simple étoit par-tout la même, on auroit par son moyen une mesure universelle: mais on a reconnu par beaucoup d'expériences faites depuis 1672 (c'est M. Richer qui fit alors cette découverte,) que plus on s'approche sur terre des pays voisins de l'Equateur, plus le pendule simple doit être court pour battre les secondes.

534. Cela fit conclure 1°. Que la pesanteur est moindre sous l'Equateur que sous les poles. Puisque (504) les longueurs des pendules simples isochrones, sont comme les pesanteurs qui les animent.

535. De-là on conclut 2°. Que la terre n'a pas une figure véritablement sphérique, mais qu'elle doit avoir la figure approchante d'un Ellipsoïde formé par la révolution d'une Ellipse sur son petit axe: qu'ainsi elle étoit applatie vers les Poles, & renflée vers l'Equateur. Car toutes les eaux qui couvrent la moitié de sa surface & qui se communiquent, sont en équilibre entr'elles & avec toutes les parties qui composent la masse de la terre. Si donc on conçoit un canal PC (fig. 91) rempli d'un fluide depuis le Pole P de la terre jusqu'à son centre C, qui communique & qui soit en équilibre avec un autre canal CE, rempli du même fluide depuis le centre C, jusqu'à la surface de la terre en E, où répond l'équateur, il faut, si la pesanteur est moindre vers E que vers P, que le canal CE soit plus long que le canal PC, sans quoi il ne peut y avoir d'équilibre suivant les régles de l'hydrostatique: il faut donc que la terre soit plus élevée vers l'Equateur, & plus affaissée vers les Poles.

536. On en conclut 3°. que dès que la terre n'étoit pas sphérique, la direction de la pesanteur, qui selon toutes les expériences est exactement perpendiculaire à la surface de la terre, ne passe pas par le centre de la terre, si ce n'est à l'égard des corps placés sur l'Equateur & sous les poles. Mais l'écart est trop petit pour qu'il faille y avoir égard dans aucune des pratiques de la Mécanique.

537. M. Richer avoit trouvé le Pendule plus court à Cayenne (c'est-à-dire, à 100 lieues de distance de l'Equateur) de 1 ligne $\frac{1}{4}$ qu'à Paris. M. Huygens en conclut que l'axe de la Terre devoit être moindre que le diamètre de l'Equateur de $\frac{1}{578}$ ou d'un peu plus de cinq de nos lieues

communes, & cela en supposant que la pesanteur de la colonne CE fût uniforme dans toute sa longueur, & celle de la colomne CP aussi uniforme dans toute sa longueur CP. Mais Newton ayant posé pour fondement de son systême, que la pesanteur décroit en raison inverse des quarrés des distances des corps pesants au centre de la terre, trouva que l'axe de la terre étoit au diamètre de l'Equateur, comme 229 à 230, ou que l'excès de ces deux axes étoit d'environ 13 lieues. On a fait depuis par ordre du Roi beaucoup d'expériences & d'observations pour vérifier ces calculs, par des mesures prises sur la surface de la terre même; & il en a resulté que la terre avoit effectivement la figure d'un sphéroïde un peu plus applati que Newton ne l'avoit conclu de sa théorie, ce qui a servi à démontrer que la pesanteur des corps décroissoit réellement à mesure qu'ils s'éloignent du centre de la terre.

538. On a encore trouvé par le moyen du pendule une autre preuve directe de la diminution de la pesanteur, à mesure que les corps s'éloignent du centre de la terre, en déterminant par des observations réïtérées la longueur du pendule simple à secondes, au pied & au sommet des hautes montagnes. C'est ainsi que M. Bouguer a conclu par un grand nombre d'expériences, que sous l'Equateur le pendule simple à secondes avoit au bord de la mer 439, 21 lignes de longueur; à 1466 toises au-dessus du niveau de la mer, il en avoit 438, 88 lignes; & à 2434 toises au-dessus du même niveau, il avoit 438, 69 lignes, toutes réductions faites.

539. Toute la théorie physique de l'Astronomie est fondée sur cette loi générale, que *tous les corps pesent les uns sur les autres en raison directe de leurs masses, & en raison inverse des quarrés de leurs distances mutuelles.*

540. Nous avons supposé dans tout ce traité, que les milieux ou espaces dans lesquels s'exécutent tous les mouvemens, étoient parfaitement libres, & que la densité ni la tenacité de la matière qui les remplit, n'y apportoient aucune résistance, & n'y causoient aucun changement; ce qui n'est pas véritable, sur-tout à l'égard des corps qui sont près de la surface de la terre, ou dans tout l'espace rempli d'air qui l'environne, mais seulement à l'égard des corps célestes, dont plusieurs traversent librement & en tout sens tout le systême Planétaire. Mais outre que la théorie de la résistance des milieux est très-difficile & très-étendue, nous ne pourrions en parler ici sans supposer une connoissance assez approfondie des propriétés des fluides, & des lignes courbes qui n'appartiennent pas à la Géométrie élémentaire.

FIN.



TABLE
DES TITRES ET DES MATIERES.

Notions Préliminaires.

PREMIERE PARTIE.

Du Mouvement rectiligne.

SECONDE PARTIE.

De la rencontre mutuelle des Corps mus en ligne droite. De la rencontre & de l'opposition des forces.

PREMIERE SECTION.

SECONDE SECTION.

TROISIEME PARTIE.

Des Mouvemens en ligne courbe.

FIN de la Table.

Les Connoisseurs qui liront avec attention ce Traité de Méchanique, & qui le confronteront avec l'édition qui en fut faite en 1757, seront surpris du grand nombre de fautes qu'on a été obligé de corriger; ils sçavent que dans les livres de Science, il n'est presque point de faute qui puisse passer pour indifférente. Dans cette Edition, comme dans celle de 1757, page 155, ligne 5, PC, *lisez* PR.

F. 3.

F. 4.

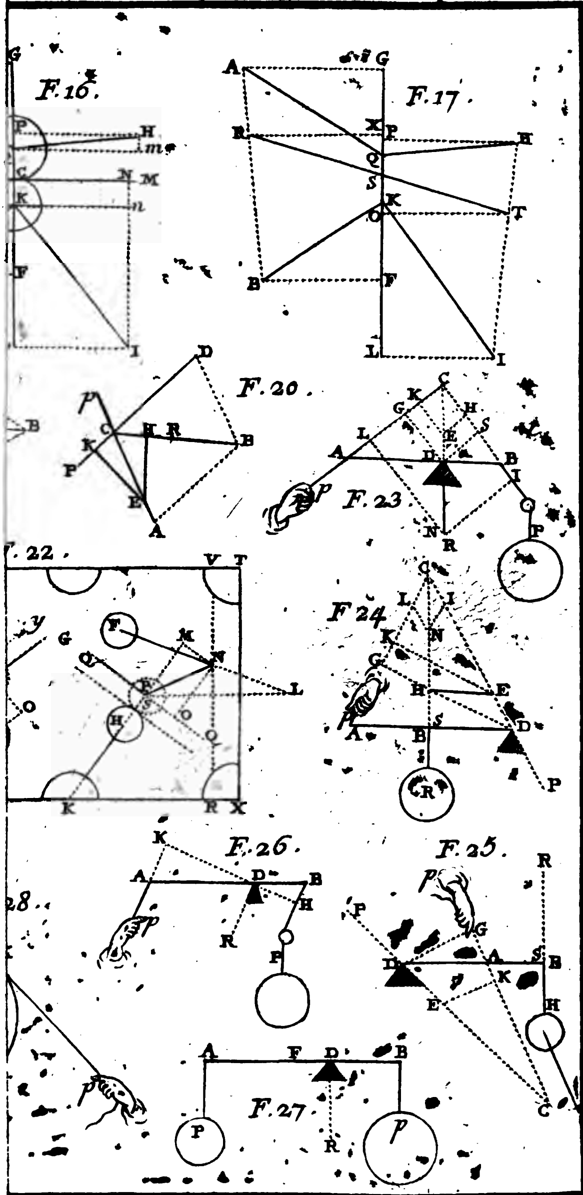
F. 6.

F. 7.

F. 8.

F. 9.

F. 10.


F. 16.
F. 17.
F. 20.
F. 23.
F. 22.
F 24.
F. 26.
F. 25.
F. 27.

Mechanique Pl. III.

F. 32.

F. 33.

F. 34.

F. 36.

F. 38.

F. 39.

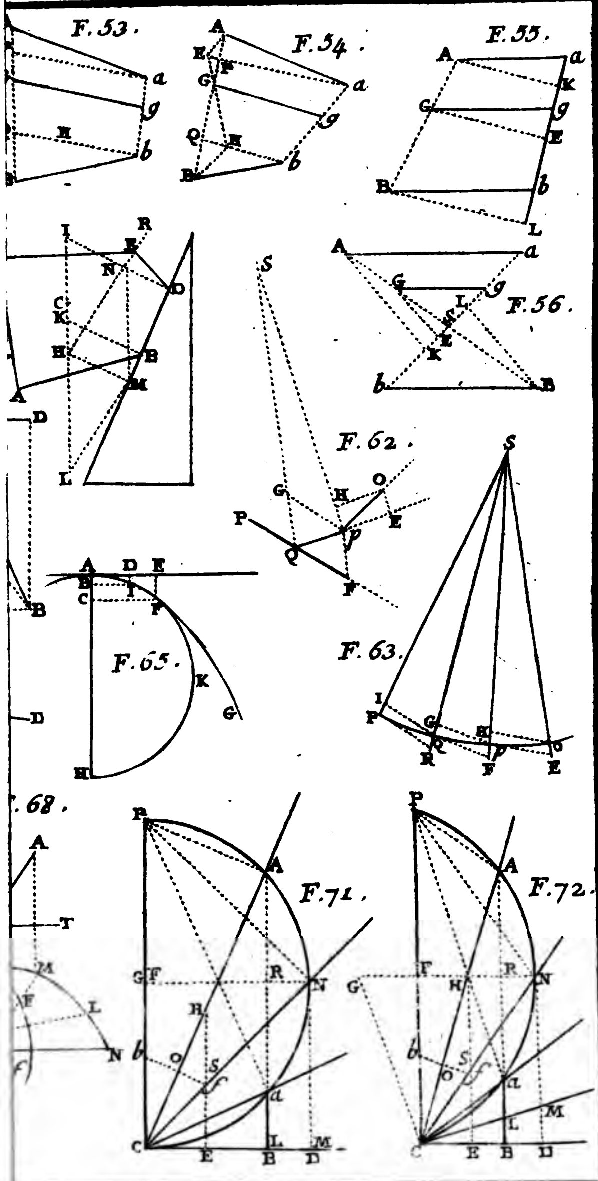
F. 41.

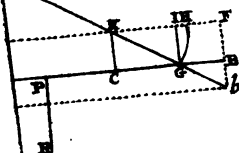
F. 48.

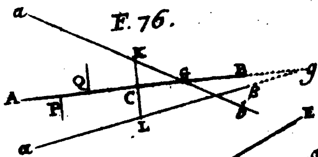
F. 49.

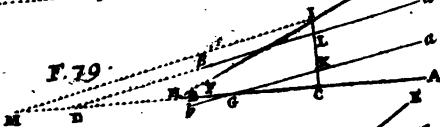
F. 50.

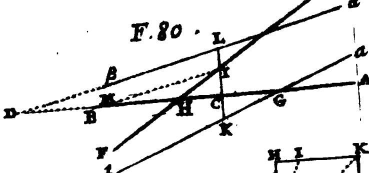
1

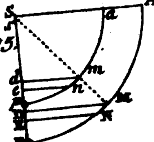

F. 53.
F. 54.
F. 55.
F. 56.
F. 62.
F. 63.
F. 65.
F. 68.
F. 71.
F. 72.

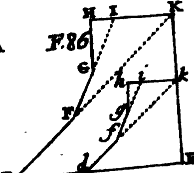

F.75.

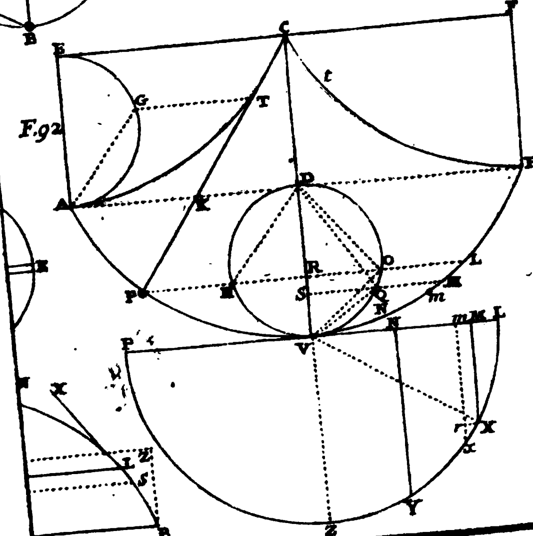

F.76.


F.79.


F.80.




F.85.
F.86


F.92